ИЗДАТЕЛЬСТВО
РАНОК

Інтернет-підтримка

А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський

Геометрія 7

- загальноосвітня програма
- допрофільна підготовка

Геометрія — це пізнання всього сущого.
Платон, давньогрецький філософ

Дорогі друзі!

Ви розпочинаєте вивчення нового математичного предмета і зі сторінок цього підручника отримаєте знання, які вже протягом багатьох століть приносять людям величезну користь. У майбутньому ці знання допоможуть і вам.

Напевне, кожний із вас коли-небудь уявляв себе великим мандрівником, який, подібно до Христофора Колумба, прокладає в бурхливому океані курс до незвіданих країн. Хтось мріяв стати славетним детективом, сучасним Шерлоком Холмсом, щоб, використовуючи струнке логічне мислення, розв'язувати найскладніші загадки, розкривати таємниці. Хтось бачив себе можновладним єгипетським фараоном, за чиєю волею посеред пустелі споруджувалися величні піраміди. Але, мабуть, не всі ви здогадувалися, що існує наука, без якої неможливо здійснити ті мрії. Ця наука — ***геометрія***.

Чому саме геометрія? Насамперед, це одна з найдавніших математичних наук. Вона виникла ще в Стародавньому Єгипті, де щороку після розливів Нілу жителі мусили відновлювати межі земельних ділянок. Сам термін «геометрія» в перекладі з грецької означає «землемірство». Вивчати геометричні форми потрібно було не тільки землеробам, але й будівельникам, адже без геометрії не вдалося б звести жодну з єгипетських пірамід.

Геометрія як розділ математики, пов'язаний з обчисленнями та розрахунками, сприяла їхньому розвиткові. Завдяки геометрії стали можливими великі наукові відкриття, зокрема географічні. Не випадково за часів Середньовіччя геометрія належала до тих наук, які повинна була опанувати кожна освічена людина.

Зазначимо також, що геометрія — це мистецтво правильного мислення. Вивчаючи цей предмет, можна побачити, як закономірності навколишнього світу відбиваються в логічних твердженнях, із яких випливають корисні наслідки.

Протягом багатьох століть основи геометрії майже не змінювалися. Чимало тверджень, які ви будете вивчати, навіть давніші, ніж Біблія. Завдяки багатьом видатним ученим, серед яких Евклід, Піфагор, Декарт, Лобачевський, ця наука вийшла на якісно новий рівень.

Отже, щасливої подорожі! Не бійтеся ставити запитання, знаходити й застосовувати власні методи розв'язування задач. Не все виходитиме відразу, але увага й наполегливість допоможуть вам відчути справжнє задоволення від вивчення геометрії.

Бажаємо вам успіхів!

Як користуватися підручником

Підручник має три розділи, кожний із яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв'язування задач. Найважливіші поняття й факти в підручнику виділено.

Вправи та задачі, подані в підручнику, поділяються на декілька груп.

Усні вправи допоможуть вам зрозуміти, наскільки успішно ви засвоїли теоретичний матеріал. Ці вправи не обов'язково розв'язувати подумки — ви можете виконати необхідні рисунки, обчислення, записати хід міркувань у чернетці. Після усних вправ можна переходити до ***графічних вправ***, що виконуються в зошиті або на комп'ютері. Далі йдуть ***письмові вправи***. Спочатку перевірте свої знання, виконуючи задачі ***рівня А***. Більш складними є задачі ***рівня Б***. І нарешті, якщо ви добре опанували матеріал і бажаєте виявити свої творчі здібності, на вас чекають задачі ***рівня В***.

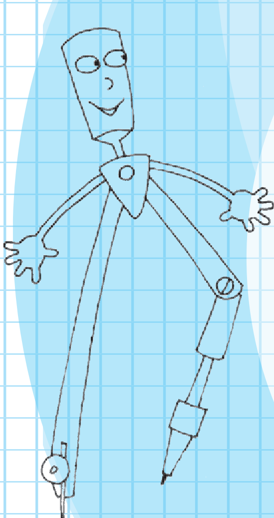
Після кожного параграфа в рубриці ***«Повторення»*** зазначено, які саме поняття й факти слід згадати для успішного вивчення подальшого матеріалу, і наведено задачі для повторення, що підготують вас до сприйняття наступної теми. Для самостійної роботи вдома призначені задачі, номери яких позначено значком . Розв'язувати всі задачі кожного рівня не обов'язково.

Наприкінці кожного розділу подано ***контрольні запитання*** й ***типові задачі для контрольних робіт***, завдяки яким ви зможете краще підготуватися до тематичного оцінювання. Пройшовши онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua, ви зможете самостійно перевірити рівень ваших знань. ***Додаткові задачі*** до розділів відкриють вам нові грані геометрії, допоможуть узагальнити вивчений матеріал і відчути красу нестандартного мислення. Розширити свої знання за кожним розділом ви можете, переглянувши відеоматеріали на тому самому сайті. Про можливість скористатися матеріалами сайта вам нагадуватиме значок .

Підсумкові огляди наприкінці кожного розділу послугують своєрідним геометричним компасом і допоможуть орієнтуватись у вивченому матеріалі. ***Додатки***, наведені в кінці підручника, поглиблять ваші знання з окремих вивчених тем, а ***історичні довідки*** ознайомлять із деякими цікавими фактами щодо розвитку геометрії та діяльності видатних учених-геометрів.

Розділ I

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості. Взаємне розміщення прямих на площині



§ 1. *Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь*

§ 2. *Відрізок. Вимірювання та відкладання відрізків. Відстань між двома точками*

§ 3. *Кут. Вимірювання та відкладання кутів. Бісектриса кута*

§ 4. *Паралельні прямі*

§ 5. *Суміжні кути та їх властивості*

§ 6. *Вертикальні кути та їх властивості. Перпендикулярні прямі. Кут між двома прямими*

Геометрія — правителька всіх розумових пошуків.

Михайло Ломоносов,
російський учений

Починаючи споруджувати дім, будівельники спершу закладають фундамент — основу, на якій триматиметься майбутня споруда. Дещо подібне необхідно зробити й нам.

Ми починаємо вивчати **планіметрію** — розділ геометрії, у якому розглядаються фігури на площині. З курсу математики ви вже маєте уявлення про деякі з них. Наша найближча мета — відновити й доповнити ці початкові знання. Геометричні відомості ми будемо викладати в певній логічній послідовності, щоб вони стали міцним фундаментом для подальшого вивчення геометрії.

Основу будь-якої науки становлять твердження, що беруться як вихідні й не потребують обґрунтування. У математиці такі твердження називають **аксіомами**. Аксіоми планіметрії, які ми розглянемо в цьому розділі, відображують основні властивості елементарних геометричних фігур. На основі цих аксіом за допомогою логічних міркувань ми будемо одержувати складніші геометричні факти.

§1 Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь

1.1. Точка і пряма

Основними геометричними фігурами на площині є **точка** і **пряма**. Площину можна уявити як аркуш, точку — як слід, залишений голкою на цьому аркуші, а пряму — як тонку натягнуту нитку. Точки зазвичай позначають великими латинськими літерами (A, B, C, D, ...), а прямі — малими латинськими літерами (a, b, c, d, ...).

Планіметрія — від латинського «планум» — площина і грецького «метрео» — вимірюю

На рис. 1 точки A і D ***лежать на прямій*** a, а точки B і C ***не лежать на прямій*** a. Можна сказати те саме інакше: пряма a проходить через точки A і D, але не проходить через точки B і C.

Пряма є нескінченною і складається з точок. На рисунках ми зображуємо лише частину прямої.

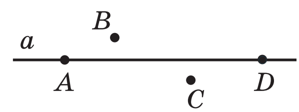


Рис. 1. Точки A і D лежать на прямій a, а точки B і C не лежать на прямій a

1.2. Властивості точок і прямих

Через одну точку на площині можна провести безліч прямих. Розглянемо прямі a і b, що проходять через точку C (рис. 2). У цьому випадку кажуть, що прямі a і b ***перетинаються в точці*** C, а їхня спільна точка C є ***точкою перетину прямих*** a і b.

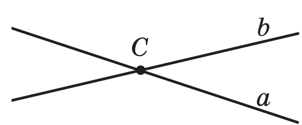


Рис. 2. Прямі a і b перетинаються в точці C

Якщо на площині позначено дві точки[1] A і B, то за допомогою лінійки через них можна провести пряму c (рис. 3). Зазначимо, що через точки A і B неможливо провести іншу пряму, яка не збігалася б із прямою c.

Рис. 3. Пряма c проходить через точки A і B

[1] Тут і далі, кажучи «дві точки» («дві прямі», «три точки» тощо), вважаємо, що ці точки (прямі) є різними.

Аксіома — від грецького «аксіос» — загальноприйнятий, безперечний, який не викликає сумніву

Цю властивість називають аксіомою проведення прямої.

Аксіома проведення прямої

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Із цього випливає, що дві прямі не можуть мати дві чи більше спільних точок: вони або мають одну спільну точку, або не мають спільних точок узагалі. Пряму з вибраними на ній двома точками можна позначати великими літерами, якими названо ці точки. Так, пряму на рис. 3 можна назвати прямою AB або прямою BA.

Через три точки площини не завжди можна провести пряму. Так, на рис. 1 не можна провести пряму через точки A, B, D.

Рис. 4. Точка C лежить між точками A і B

На рис. 4 точки A, B, C лежать на одній прямій, причому точка C ***лежить між точками*** A і B. Можна також сказати, що точки A і B ***лежать по різні боки*** від точки C.

Точки B і C ***лежать по один бік*** від точки A, а точки A і C ***лежать по один бік*** від точки B.

Аксіома розміщення точок на прямій

Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

1.3. Промінь

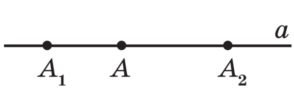


Рис. 5. Точка A ділить пряму a на два промені AA_1 і AA_2

Будь-яка точка ділить пряму на дві частини (рис. 5). Кожну з цих частин можна умовно вважати половиною прямої, тому утворені частини прямої дістали назву «півпрямі», або інакше — промені.

Променем (або **півпрямою**) називається частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать по один бік від деякої даної на ній точки, а також самої цієї точки. Дана точка називається **початковою точкою** (або **початком**) **променя**.

На рис. 5 точка A — початкова точка двох променів прямої a. Промені, як і прямі, можна позначати малими латинськими літерами або за двома точками: початковою (обов'язково на першому місці!) і ще будь-якою точкою цього променя.

Так, промінь на рис. 6 можна позначити b або BC, але не можна позначити CB.

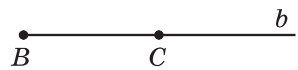


Рис. 6. Промінь BC

Два різні промені однієї прямої зі спільною початковою точкою називаються **доповняльними променями**.

На рис. 5 AA_1 і AA_2 — доповняльні промені. Вони доповнюють один одного до прямої a і мають тільки одну спільну точку — їхній початок.

Задача

На прямій точка C лежить між точками A і B. Чи можуть промені AB і AC бути доповняльними? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання

Нехай A, B і C — дані точки (рис. 7). Оскільки точка C лежить між точками A і B, то точки C і B лежать по один бік від точки A, отже, вони належать одному променю з початком A. Цей промінь можна назвати AB або AC. Таким чином, дані промені збігаються, тому вони не є доповняльними.

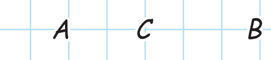


Рис. 7

Відповідь: не можуть.

1.4. *Означення і його роль у геометрії*

У п. 1.3 описано два поняття: «промінь», яке відоме вам із курсу математики 5 класу, і нове — «доповняльні промені». Завдяки цим описам можна чітко уявити, які саме фігури розглядаються. Наведені описи є **означеннями**; вони вказують на особливості описаної фігури, що відрізняють її від інших фігур.

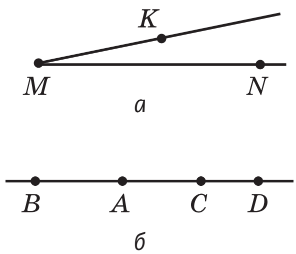


Рис. 8. До пояснення поняття «доповняльні промені»:
а) промені MN і MK не є доповняльними;
б) промені AB і CD не є доповняльними

Прочитаємо ще раз означення доповняльних променів. Якщо в ньому пропустити лише слова «однієї прямої», то промені MN і MK на рис. 8, *а* доведеться вважати доповняльними. Коли ж не уточнити, що доповняльні промені повинні мати спільний початок, то промені AB і CD на рис. 8, *б* теж слід назвати доповняльними. Таким чином, ці змінені означення не описуватимуть той об'єкт, який ми маємо на увазі.

Це свідчить про те, як важливо приділяти увагу кожному слову в означенні: тільки так можна по-справжньому зрозуміти геометрію.

Запитання і задачі

Усні вправи

1. На прямій AB позначено точку C. Чи лежить точка A на прямій BC? Чи лежить точка B на прямій AC?

2. Точка A лежить на прямій c, а точка B не лежить на прямій c. Чи перетинаються прямі c і AB? Якщо так, то назвіть точку їхнього перетину.

3. Через точку A проведено дві прямі. Чи можуть ці прямі мати спільну точку B, відмінну від точки A?

4. Точка B лежить на прямій між точками A і C. Як розміщені точки B і C відносно точки A?

5. На прямій позначено точки K, L, M, N (рис. 9).
Серед позначених точок назвіть:

Рис. 9

а) точку, що лежить між точками L і N;
б) точки, що лежать між точками K і N;
в) дві точки, що лежать по один бік від точки L;
г) точку, по різні боки від якої лежать точки K і M.

6. На промені AB позначено точку C. Чи може точка A лежати між точками B і C? Чи може точка B лежати між точками A і C?

7. Промені DE і DF — доповняльні. Яка з точок D, E і F лежить між двома іншими?

8. Два промені мають спільну початкову точку. Чи обов'язково вони є доповняльними?

Графічні вправи

9. Проведіть пряму.
а) Позначте точки A і B, що лежать на цій прямій, і точки C і D, що не лежать на ній. Як можна позначити цю пряму?
б) Проведіть ще одну пряму через точки A і C. Скільки спільних точок мають побудовані прямі?

10. Позначте точку A.
а) Проведіть промінь із початком A і позначте на ньому точку B. Назвіть пряму, частиною якої є промінь AB.
б) Проведіть промінь із початком B, що не проходить через точку A. Чи можна назвати побудований промінь BA?

Письмові вправи

Рівень А

11. Позначте точки B і C. Проведіть через них пряму. Проведіть ще одну пряму так, щоб вона проходила через точку B, але не проходила через точку C. Скільки спільних точок мають ці прямі?

12. Позначте дві точки й від руки проведіть через них пряму. Перевірте правильність побудови за допомогою лінійки. Якою аксіомою ви скористалися?

13. На прямій точки E і F лежать по різні боки від точки D. Як розміщені точки D і F відносно точки E? Чи може точка F лежати між точками D і E?

14. Точки M і N лежать на прямій по один бік від точки K. Яка з цих трьох точок не може лежати між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

15. Позначте точки A і B. Проведіть промінь AB. Чи є доповняльними промені AB і BA?

16. На прямій позначено дві точки. Скільки пар доповняльних променів при цьому утворилося?

17. Побудуйте доповняльні промені PQ і PR. Назвіть точки, що лежать по один бік від точки R. Чи лежить точка Q на промені RP?

Рівень Б

18. Дано чотири точки, причому ніякі три з них не лежать на одній прямій. Через кожні дві з даних точок проведено пряму. Скільки всього прямих проведено?

19. Точки A, B, C лежать на одній прямій, а точка D не лежить на цій прямій. Через кожні дві з даних точок проведено пряму. Скільки всього прямих проведено?

20. На шляху з Дніпропетровська до Харкова автомобіль проїжджає Красноград, а на шляху з Краснограда до Дніпропетровська — Перещепине. Яке з цих міст розташоване на шляху з Харкова до Перещепиного?

21. На прямій позначено точки X, Y, Z, причому точки X і Y лежать по один бік від точки Z, а точки X і Z — по один бік від точки Y. Яка з трьох точок лежить між двома іншими?

22. Точка C лежить на промені AB, а точка B — на промені CA. Яка з цих трьох точок лежить між двома іншими?

23. Точки A, B і C лежать на одній прямій, причому промені AB і AC не є доповняльними, а точки A і C лежать по один бік від точки B. Яка з цих трьох точок лежить між двома іншими?

24. Чи можуть два промені однієї прямої не бути доповняльними? Зробіть рисунок.

25. Два промені мають єдину спільну точку. Чи є такі промені доповняльними? Зробіть рисунки.

Рівень В

26. Скільки прямих трас необхідно прокласти, щоб сполучити будь-які два з чотирьох міст? Розгляньте всі можливі випадки. Зробіть рисунки.

27. Дано три прямі, причому будь-які дві з них перетинаються. Скільки точок перетину може утворитися? Розгляньте всі можливі випадки. Зробіть рисунки.

28. Як мають бути розміщені на площині n точок, щоб вони визначали рівно n прямих, якщо $n > 2$?

29. На прямій позначено точки A, B і C. Скільки різних променів можна назвати за допомогою цих точок? Скільки серед цих променів пар доповняльних променів? Чи зміниться відповідь, якщо дані точки не лежать на одній прямій?

Повторення перед вивченням §2

Теоретичний матеріал

5 клас

- пряма та відрізок
- побудова і вимірювання відрізків

Задачі

30. На прямій точка B лежить між точками A і C. Чи існує на цій прямій точка, що лежить між точками:

а) A і B, але не лежить між точками A і C;

б) A і C, але не лежить між точками A і B?

31. На прямій позначено п’ять точок. Визначте, які з наведених тверджень є правильними:

а) будь-які три з даних точок лежать між двома іншими;

б) серед даних точок знайдуться три, що лежать між двома іншими;

в) серед даних точок існує принаймні одна, що не лежить між двома з решти цих точок;

г) серед даних точок існує рівно одна, що не лежить між двома з решти цих точок.

§2 Відрізок. Вимірювання та відкладання відрізків. Відстань між двома точками

2.1. Означення відрізка

Будь-який промінь є частиною прямої, «обмеженою» з одного боку початковою точкою. Розглянемо тепер відрізок — частину прямої, «обмежену» точками з обох боків.

Означення

Відрізком називається частина прямої, що складається з двох даних точок цієї прямої (**кінців відрізка**) й усіх точок, що лежать між ними.

Рис. 10. Відрізок AB — частина прямої AB

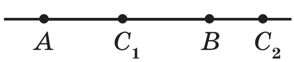


Рис. 11. Точка C_1 лежить на відрізку AB, точка C_2 не лежить на відрізку AB

Відрізок позначають, записуючи його кінці в довільному порядку. Так, відрізок на рис. 10 можна назвати «відрізок AB» або «відрізок BA». Очевидно, що відрізок AB є частиною прямої AB. При цьому слід розрізняти, йдеться про пряму AB чи про відрізок AB.

Якщо розглянути разом із точками A і B якусь іншу точку прямої, то, відповідно до аксіоми розміщення точок на прямій, вона або лежить між точками A і B, тобто належить відрізку AB (на рис. 11 такою точкою є C_1), або не лежить між точками A і B, тобто не належить відрізку AB (на рис. 11 такою точкою є C_2).

2.2. Рівність відрізків. Середина відрізка

Означення

Два відрізки називаються **рівними**, якщо вони суміщаються накладанням.

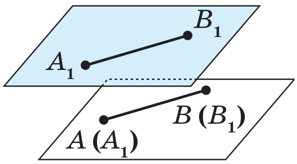


Рис. 12. Відрізки AB і A_1B_1 суміщаються накладанням

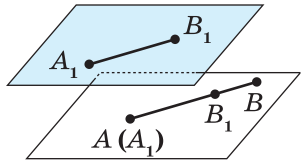


Рис. 13. Відрізки AB і A_1B_1 не суміщаються накладанням

Рис. 14. Точка E — середина відрізка DF

Нанесемо відрізок A_1B_1 на прозору плівку й накладемо його на відрізок AB так, щоб точка A_1 збіглася з точкою A і ці відрізки мали інші спільні точки. Якщо точка B_1 суміститься з точкою B (рис. 12), то відрізки AB і A_1B_1 є рівними (пишуть так: $AB = A_1B_1$). Якщо ж точки B і B_1 не сумістяться, то меншим із двох відрізків є той, який становить частину другого.

На рис. 13 точка B_1 сумістилася з деякою точкою відрізка AB, відмінною від точки B, тому відрізок AB більший, ніж відрізок A_1B_1. Коротко це позначають так: $AB > A_1B_1$.

Означення

Серединою відрізка називається точка відрізка, що ділить його навпіл (тобто на два рівні відрізки).

На рис. 14 відрізки DE і EF рівні, тобто точка E — середина відрізка DF. Зазвичай на рисунках рівні відрізки позначають однаковою кількістю рисок.

2.3. Вимірювання та відкладання відрізків

Важливою властивістю відрізка є його довжина. Вона виражається додатним числом, що може бути визначене порівнянням даного відрізка з відрізком, прийнятим за одиницю вимірювання,— одиничним відрізком. За одиничний можна обрати будь-який відрізок. На практиці обирають одиничні відрізки завдовжки 1 мм, 1 см, 1 м тощо.

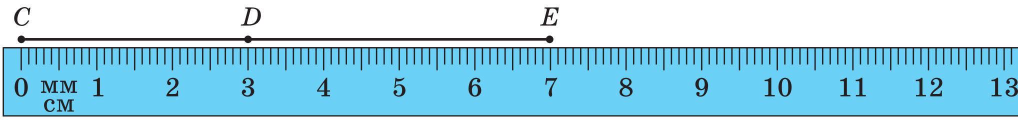


Рис. 15. Вимірювання відрізка за допомогою лінійки

Наприклад, на вимірювальній лінійці, якою ми зазвичай користуємося, малі поділки задають одиничні відрізки завдовжки 1 міліметр, а великі — завдовжки 1 сантиметр (рис. 15).

Прикладаючи лінійку до даного відрізка, ми визначаємо **довжину відрізка**. Число, що виражає довжину відрізка, залежить від одиниці вимірювання.

На рис. 15 довжина відрізка CE дорівнює 70 мм, або 7 см, або 0,07 м тощо. Довжина відрізка CD дорівнює 3 см, а відрізка DE — 4 см. Можна сказати, що відрізок CE складається з двох частин — відрізків CD і DE. Точка D лежить між точками C і E, а довжина відрізка CE дорівнює сумі довжин відрізків CD і DE (пишуть так: $CD + DE = CE$).

Сформулюємо аксіоми вимірювання та відкладання відрізків.

Аксіома вимірювання відрізків

Кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом у заданих одиницях вимірювання. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які відрізок ділиться будь-якою його точкою.

Аксіома відкладання відрізків

На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один.

Очевидно, що вимірювання відрізків полягає в послідовному накладанні на заданий відрізок певної кількості одиничних відрізків. Тому ***рівні відрізки мають рівні довжини, а більший відрізок має більшу довжину***. Справджується й інше твердження: ***якщо відрізки мають рівні довжини, то вони рівні, а більшим із двох відрізків є той, який має більшу довжину***. Таким чином, для порівняння відрізків можна порівняти їхні довжини.

Довжину відрізка AB називають також **відстанню між точками** A і B. Часто, кажучи «відрізок AB», ми маємо на увазі його довжину.

Задача

На промені AB позначено точку C, причому AB = = 12 см, BC = 7 см. Знайдіть довжину відрізка AC.

Розв'язання

Розглянемо два випадки розміщення точки C на промені AB.

1. Точка C не лежить на відрізку AB (рис. 16, а). Тоді точка B лежить на відрізку AC. За аксіомою вимірювання відрізків $AC = AB + BC$, тобто $AC = 12 + 7 = 19$ (см).
2. Точка C лежить на відрізку AB (рис. 16, б). Тоді $AB = AC + BC$, тобто $12 = AC + 7$. Таким чином, $AC = 12 - 7 = 5$ (см).

Відповідь: 19 см або 5 см.

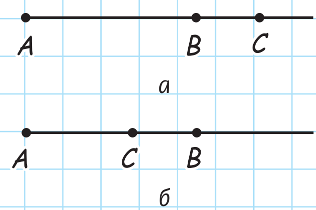


Рис. 16

Запитання і задачі

Усні вправи

32. На прямій позначено три точки. Скільки відрізків при цьому утворилося?

33. На прямій точка A лежить між точками B і C. Який із відрізків з кінцями в цих точках є найбільшим?

34. Якщо точка C лежить на відрізку AB, то вона лежить і на промені AB. Чи є правильним таке твердження?

35. Якщо точка C лежить на промені AB, то вона обов'язково лежить і на відрізку AB. Чи є правильним таке твердження?

36. Чи можна розбити пряму на відрізок і два промені? Якщо так, то чи можуть отримані промені бути доповняльними?

37. Точки A, B і C лежать на одній прямій. Відрізок AB більший, ніж відрізок AC. Чи може точка C лежати між точками A і B? Чи може точка A лежати між точками B і C?

38. Відрізки AB і BC рівні й лежать на одній прямій. Яка з точок A, B, C лежить між двома іншими?

Графічні вправи

39. Проведіть промінь із початком у точці A.

а) На цьому промені відкладіть відрізок AB, що дорівнює 6 см, і позначте на цьому відрізку точку C.

б) Виміряйте довжину відрізка AC.

в) Обчисліть довжину відрізка CB. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

40. Проведіть промінь із початком у точці C.

а) На цьому промені відкладіть відрізок CD, що дорівнює 4 см.

б) Побудуйте точку E так, щоб точка D була серединою відрізка CE. Якою є довжина відрізка CE?

Письмові вправи

Рівень А

41. На прямій точка M лежить між точками K і N. Знайдіть довжину відрізка:

а) KN, якщо $KM = 2{,}9$ см, $MN = 4{,}1$ см;

б) MN, якщо $KN = 8{,}3$ см, $KM = 5{,}8$ см.

42. Точки B і C лежать на відрізку AD, який дорівнює 10 см. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $AB = 2{,}4$ см, $CD = 3{,}6$ см.

43. На відрізку MN позначено точки P і R так, що $MP = PR = RN$. Зробіть рисунок. Які ще рівні відрізки з кінцями в даних точках утворилися на рисунку?

44. На прямій точка B лежить між точками A і C. Які з відрізків із кінцями в цих точках можуть бути рівними? Відповідь обґрунтуйте.

45. На промені з початком A позначено точки B і C так, що $AB = 6{,}4$ см, $BC = 2{,}6$ см. Якою може бути довжина відрізка AC? Розгляньте два можливі випадки розміщення точок на промені.

46. На промені CD позначено точку E. Знайдіть довжину відрізка CE, якщо $CD = 8$ м, $DE = 6{,}2$ м. Скільки розв'язків має задача?

47. На прямій позначено точки P, R і S, причому $PR < PS < RS$. Яка з цих трьох точок лежить між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

Рівень Б

48. На прямій точка M лежить між точками K і N. Знайдіть довжини відрізків:

а) KM і MN, якщо $KN = 24$ см, а відрізок KM більший, ніж відрізок MN, на 8 см;

б) KM і KN, якщо $MN = 9$ см, а $KN : KM = 7 : 4$.

49. Точки B і C лежать на відрізку AD. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $AD = 10$ см, $AB = 6{,}8$ см, $CD = 8{,}3$ см.

50. На відрізку MN позначено точки A і B так, що $MA = 7$ мм, $AB = 4{,}3$ мм, $BN = 5{,}1$ мм. Знайдіть довжину відрізка MN. Розгляньте всі можливі випадки.

51. На промені з початком A позначено точки B, C і D, причому $AB = 4$ см, $BC = 5{,}2$ см, $CD = 2{,}4$ см. Якою може бути довжина відрізка AD? Розгляньте всі можливі випадки.

52. Точка C — середина відрізка AB, а точка D — середина відрізка AC. Знайдіть довжину відрізка:

а) BD, якщо $AC = 16$ см;

б) AB, якщо $BD = 12$ см.

53. На прямій позначено точки M, N і K, причому відрізок MN більший, ніж NK, а відрізок NK не є найменшим серед утворених відрізків. Який з отриманих відрізків найменший? Відповідь обґрунтуйте.

54. Точки A, B і C лежать на одній прямій. Назвіть найбільший із відрізків з кінцями в цих точках, якщо точка C лежить на промені AB, а точка B — на промені CA. Відповідь обґрунтуйте.

Рівень В

55. На прямій позначено точки A і B, відстань між якими становить 6 см. Опишіть розміщення на цій прямій усіх точок M таких, що:

а) $AM + MB = 8$ см;

б) $AM + MB = 6$ см;

в) $AM = 2MB$.

56. Відрізок поділений трьома точками на чотири частини, кожна з яких дорівнює a. Скільки при цьому утворилося рівних відрізків, довжина яких не дорівнює a? Визначте їхні довжини.

57. Точка C лежить на відрізку AB. Доведіть, що відстань між серединами відрізків AC і CB не залежить від розміщення точки C. Знайдіть цю відстань, якщо $AB = 20$ см.

58. Точка C лежить на відрізку AB. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо відстань між серединами відрізків AC і CB дорівнює 5 см.

59. Відрізки AB і CD лежать на одній прямій. Доведіть, що коли вони мають спільну середину, то $AC = BD$.

60. На прямій позначено точки A, B, C і D, причому $AB = CD$. Чи утворилися при цьому інші рівні відрізки з кінцями в цих точках? Якщо так, то доведіть їхню рівність.

Повторення перед вивченням § 3

Теоретичний матеріал

5 клас

- кут
- побудова й вимірювання кутів

Задачі

61. З точки A проведено промені AB і AC, що не є доповняльними. Чи обов'язково ці промені збігатимуться?

62. Відрізки BD і DK мають єдину спільну точку D.

а) Чи обов'язково точка D лежить між точками B і K?

б) Чи може якась пряма, що не проходить через точку D, перетинати обидва ці відрізки?

§ 3 Кут. Вимірювання та відкладання кутів. Бісектриса кута

3.1. Означення кута

Вивчаючи доповняльні промені, ми розглядали випадок, коли дві півпрямі однієї прямої мають спільну початкову точку. Розглянемо тепер той випадок, коли дві півпрямі мають спільну початкову точку, але не обов'язково є півпрямими однієї прямої.

Означення

Кутом називається геометрична фігура, що складається з двох променів **(сторін кута)**, які виходять з однієї точки **(вершини кута)**.

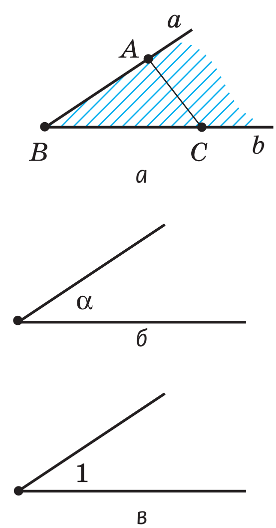


Рис. 17. Позначення кута

Для позначення кутів використовують знак $\angle$. На рис. 17, *а* зображено кут із вершиною B, сторонами якого є промені a і b (або BA і BC). Цей кут можна позначити одним із таких способів: $\angle B$, $\angle ABC$, $\angle CBA$, $\angle(ab)$, $\angle(ba)$. Якщо кут позначають за вершиною та двома точками на сторонах, то вершину обов'язково вказують на другому місці. Іноді кути позначають грецькими літерами (α, β, γ, ...) (рис. 17, *б*) або числами (рис. 17, *в*).

Сторони кута ділять площину на дві частини, кожну з яких можна вважати ***внутрішньою областю кута***. В 7 класі будемо розглядати лише ту, яка повністю містить будь-який відрізок із кінцями на сторонах кута (на рис. 17, *а* її заштриховано). Промінь, що виходить із вершини кута і проходить у його внутрішній області, ***ділить цей кут на два кути***. На рис. 18 промінь BD ділить кут ABC на кути ABD і DBC.

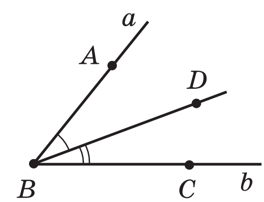


Рис. 18. Промінь BD ділить кут ABC на два кути

Означення

Розгорнутим кутом називається кут, сторони якого є доповняльними півпрямими.

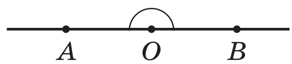


Рис. 19. Розгорнутий кут AOB

На рис. 19 зображено розгорнутий кут AOB.

Пряма AB ділить площину на дві частини, кожну з яких можна вважати внутрішньою областю розгорнутого кута AOB. Домовимося ту з частин, яку ми розглядаємо як внутрішню, позначати дужкою.

3.2. Рівність кутів. Бісектриса кута

Бісектриса — від латинського «біс» — двічі й «секто» — розтинаю — та, що розтинає надвоє

Означення

Два кути називаються **рівними**, якщо вони суміщаються накладанням.

На рис. 20 зображено кути 1 і 2. Накладемо кут 1 на кут 2 так, щоб їхні вершини збіглися, сторона першого кута сумістилася зі стороною другого, а внутрішні області цих кутів були розміщені по один бік від прямої, на якій лежать сторони, що сумістилися. Якщо другі сторони цих кутів також сумістяться, то кути 1 і 2 є рівними (пишуть так: $\angle 1 = \angle 2$).

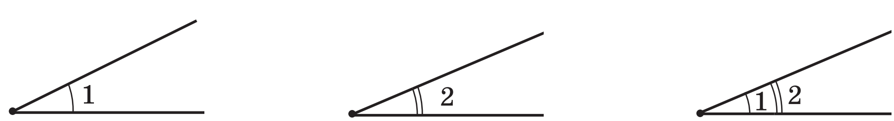


Рис. 20. Кути 1 і 2 суміщаються накладанням

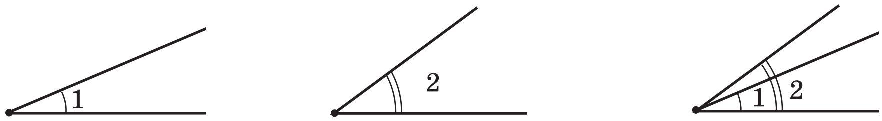


Рис. 21. Кути 1 і 2 не суміщаються накладанням

Якщо ж ці сторони не сумістяться, то меншим вважається той кут, сторона якого належить внутрішній області другого кута. На рис. 21 кут 1 є частиною кута 2, тобто він менший, ніж кут 2 (пишуть так: $\angle 1 < \angle 2$).

Означення

Бісектрисою кута називається промінь, що виходить із вершини кута й ділить кут навпіл (тобто на два рівні кути).

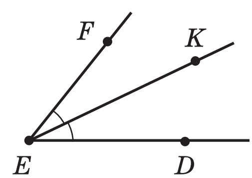


Рис. 22. Промінь EK — бісектриса кута DEF

На рис. 22 кути DEK і KEF є рівними, тому промінь EK — бісектриса кута DEF. Зазвичай на рисунках рівні кути позначають однаковою кількістю дужок.

3.3. Вимірювання та відкладання кутів

Градус — від латинського «градус» — крок. Стародавні вавилоняни вважали, що сонячний диск на денному шляху «робить 180 кроків»

Вимірювання кутів має багато спільного з вимірюванням відрізків. Величина відрізка кількісно виражається мірою (довжиною) відрізка, а величина кута — мірою кута. Міра кута виражається додатним числом. Це число можна визначити вимірюванням, що ґрунтується на порівнянні даного кута з кутом, прийнятим за одиницю вимірювання.

Зазвичай такою одиницею є 1 градус (позначається $1°$) — кут, що дорівнює $\frac{1}{180}$ частини розгорнутого кута. **Градусна міра кута** вказує, скільки кутів завбільшки $1°$ та їхніх частин міститься в цьому куті. Для вимірювання кутів зазвичай використовують транспортир, поділки якого задають міру кута в градусах (рис. 23)[1].

Сформулюймо аксіоми вимірювання та відкладання кутів.

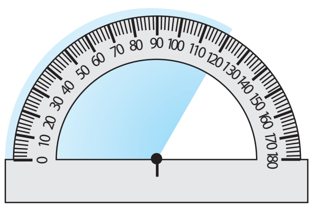


Рис. 23. Вимірювання кута за допомогою транспортира

Аксіома вимірювання кутів

Кожний кут має градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°.

Якщо промінь ділить даний кут на два кути, то градусна міра даного кута дорівнює сумі градусних мір двох отриманих кутів.

Аксіома відкладання кутів

Від будь-якого променя даної прямої можна відкласти в заданий бік від прямої кут із заданою градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

Так, на рис. 18 градусна міра кута ABC дорівнює сумі градусних мір кутів ABD і DBC (це твердження можна записати у вигляді рівності: $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$). Часто, кажучи «кут ABC», ми маємо на увазі градусну міру цього кута.

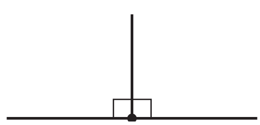


Рис. 24. Бісектриса ділить розгорнутий кут на два прямі кути

Бісектриса розгорнутого кута ділить його на два кути, кожний із яких дорівнює $90°$ (рис. 24). Такі кути називаються **прямими**. На відміну від інших кутів, позначуваних дужками, прямий кут на рисунках позначають так: ⏋.

[1] У 7 класі ми будемо розглядати кути, градусна міра яких не перевищує 180°. Для більш точних вимірювань використовуються 1 мінута (позначається $1'$) — $\frac{1}{60}$ частина градуса і 1 секунда (позначається $1''$) — $\frac{1}{60}$ частина мінути.

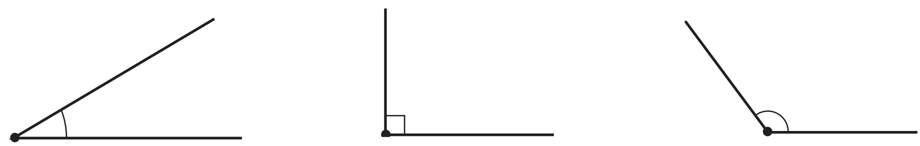


Рис. 25. Види нерозгорнутих кутів

Загалом, нерозгорнуті кути поділяються на три види (рис. 25):

- **гострі кути**, менші за $90°$;
- **прямі кути**, що дорівнюють $90°$;
- **тупі кути**, більші за $90°$, але менші за $180°$.

На практиці для побудови кутів використовують транспортир. Для побудови прямих кутів часто користуються косинцем.

Вимірювання кутів можна вважати послідовним накладанням на даний кут певного (не обов'язково цілого) числа кутів, що дорівнюють 1°. Тому ***рівні кути мають рівні градусні міри, а більший кут має більшу градусну міру***. Правильним є й інше твердження: ***якщо кути мають рівні градусні міри, то вони рівні, а з двох кутів більшим є той, який має більшу градусну міру***. Таким чином, для порівняння двох кутів достатньо порівняти їхні градусні міри.

Задача

Промінь b ділить кут (ac), що дорівнює 120°, на два кути, один із яких є втричі меншим, ніж кут (ac). Знайдіть ці кути.

Розв'язання

Нехай кут (ab) утричі менший, ніж кут (ac). Тоді $\angle(ab) = 120° : 3 = 40°$. Відповідно до аксіоми вимірювання кутів, якщо промінь b ділить кут (ac) на два кути, то їхня сума дорівнює даному куту: $\angle(ac) = \angle(ab) + \angle(bc)$. Тоді $\angle(bc) = \angle(ac) - \angle(ab)$; $\angle(bc) = 120° - 40° = 80°$.

Відповідь: 40°, 80°.

3.4. *Аналогія в геометрії*

Іноді в ході розв'язування задач про властивості відрізків і кутів застосовуються одні й ті самі методи й підходи. Це пояснюється схожістю деяких властивостей цих фігур. Така схожість у науці називається **аналогією**.

Поясними суть аналогії на прикладі двох задач.

Задача 1

На відрізку AB, який дорівнює 20 см, позначено точку C. Знайдіть відстань між серединами відрізків AC і CB.

Задача 2

Промінь c ділить кут (ab), що дорівнює 140°, на два кути. Знайдіть кут між бісектрисами кутів (ac) і (cb).

На перший погляд, перед нами зовсім різні задачі, адже в одній ідеться про відрізки, а в другій — про кути. Однак в обох задачах дано певне «ціле», поділене на частини. Крім того, поняття середини відрізка і бісектриси кута пов'язані з поділом цілого навпіл, і в обох задачах нам необхідно знайти суму половин кожної з частин фігури.

Розв'язання

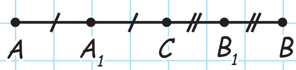


Рис. 26

Нехай точка C належить відрізку AB, точки A_1 і B_1 — середини відрізків AC і CB відповідно (рис. 26).

Тоді $A_1C = \frac{1}{2}AC$, $CB_1 = \frac{1}{2}CB$.

Знайдемо довжину відрізка A_1B_1:

$A_1B_1 = A_1C + CB_1 = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB$.

Розв'язання

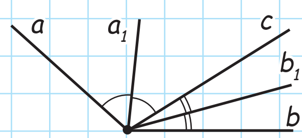


Рис. 27

Нехай промінь c ділить кут (ab) на два кути, промені a_1 і b_1 — бісектриси кутів (ac) і (cb) відповідно (рис. 27).

Тоді $\angle(a_1c) = \frac{1}{2}\angle(ac)$, $\angle(cb_1) = \frac{1}{2}\angle(cb)$.

Оскільки за умовою задачі $AB =$ $= 20$ см, маємо: $A_1B_1 = \frac{20}{2} = 10$ см.

Відповідь: 10 см.

Знайдемо градусну міру кута (a_1b_1):

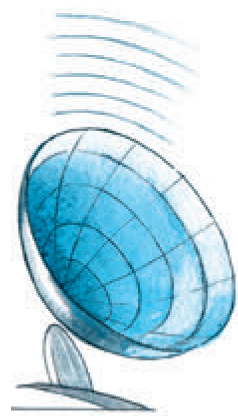
$\angle(a_1b_1) = \angle(a_1c) + \angle(cb_1) = \frac{1}{2}(\angle(ac) +$ $+ \angle(cb)) = \frac{1}{2}\angle(ab)$.

Оскільки за умовою задачі $\angle(ab) =$ $= 140°$, маємо: $\angle(a_1b_1) = \frac{140°}{2} =$ $= 70°$.

Відповідь: 70°.

Як бачимо, в основі обох розв'язань лежить спільна ідея. Знайшовши її під час розв'язування першої задачі, ми можемо застосувати основні етапи міркувань і до умов другої задачі, тобто розв'язати її *аналогічно*.

Міркування за аналогією доволі часто застосовуються й в інших науках. Наприклад, біологи з'ясували, що кажан у польоті випускає ультразвукові коливання і, сприймаючи коливання, відбиті від перешкоди, орієнтується за цими сигналами в темряві. За аналогічним принципом вчені створили радіолокатор, що визначає місце розташування об'єктів у будь-яких погодних умовах. Проте аналогія в науці не завжди дає бажаний результат: протягом багатьох століть людина намагалася злетіти в небо за допомогою штучних крил, аналогічних пташиним, але ті спроби були марними. І тільки більш ґрунтовні наукові дослідження привели до створення дельтапланів, літаків та інших літальних апаратів, за допомогою яких людина здійнялась у повітря. Видатний німецький астроном і математик Йоганн Кеплер вважав аналогії «своїми вірними вчителями» й підкреслював, що «аналогіями найменше слід нехтувати в геометрії». Однак при цьому необхідно зважати, що аналогія, корисна як спосіб міркувань, сама по собі не може бути доказом яких-небудь властивостей геометричних фігур.



Запитання і задачі

Усні вправи

63. Точки A, B і C не лежать на одній прямій. Чи може кут ABC бути розгорнутим?

64. Визначте, яким (гострим, прямим, тупим чи розгорнутим) є кут, який утворюють стрілки годинника о 3 годині; о 8 годині; об 11 годині; о 6 годині.

65. Назвіть градусну міру кута, на який повертається:

а) хвилинна стрілка годинника протягом 15 хвилин; 30 хвилин; 10 хвилин;

б) годинна стрілка годинника протягом 3 годин; 1 години; 30 хвилин.

66. Промінь l ділить кут (mn) на два кути. Порівняйте кути (ml) і (mn).

67. На рис. 28 назвіть усі гострі кути; усі прямі кути; усі тупі кути.

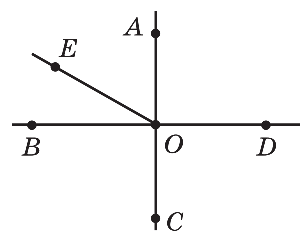


Рис. 28

68. Чи може сума градусних мір двох гострих кутів:

а) бути меншою за градусну міру прямого кута;

б) дорівнювати градусній мірі прямого кута;

в) бути більшою за градусну міру прямого кута;

г) бути більшою за градусну міру розгорнутого кута?

69. Промінь b — бісектриса нерозгорнутого кута (ac). Чи може кут (ab) бути прямим; тупим?

Графічні вправи

70. Накресліть кут ABC, що дорівнює $100°$.

а) Проведіть бісектрису BD цього кута. Якою є градусна міра кута DBC?

б) Перегніть рисунок по прямій BD. Чи збігаються промені BA і BC? Як це пояснити?

71. Накресліть на окремому аркуші гострий кут (ab) і проведіть із його вершини промінь c, що ділить цей кут на два кути.

а) За допомогою транспортира виміряйте всі утворені кути й порівняйте градусні міри кутів (ac) і (cb).

б) Покажіть за допомогою накладання, який із кутів (ac) і (cb) є меншим.

Письмові вправи

Рівень А

72. Промінь b ділить кут (ac) на два кути. Знайдіть:

а) кут (ac), якщо $\angle(ab)=63°$, $\angle(bc)=63°$;

б) кут (ab), якщо $\angle(ac)=109°$, $\angle(bc)=28°$.

73. Промені OB і OC ділять кут AOD на три кути. Знайдіть кут BOC, якщо $\angle AOD=142°$, $\angle AOB=12°$, а кут COD прямий.

74. Чи може промінь b ділити кут (ac) на два кути, якщо $\angle(bc)=70°$, $\angle(ac)=65°$? Відповідь обґрунтуйте.

75. Промінь BD — бісектриса кута ABC. Знайдіть кути ABC і ABD, якщо кут ABC більший за кут DBC на $38°$.

76. Промінь b — бісектриса кута (ac). Знайдіть:

а) кут (ac), якщо $\angle(bc)=52°$;

б) кут (ab), якщо $\angle(ac)$ прямий.

Рівень Б

77. Промінь b ділить кут (ac), який дорівнює $150°$, на два кути. Знайдіть кути (ab) і (bc), якщо:

а) кут (ab) менший за кут (bc) на $40°$;

б) градусні міри кутів (ab) і (bc) відносяться як $2:3$.

78. Промінь OB ділить кут AOC, що дорівнює $120°$, на два кути. Знайдіть кути AOB і BOC, якщо:

а) кут BOC більший, ніж кут AOB, у 5 разів;

б) градусні міри кутів AOB і BOC відносяться як $3:5$.

79. Промені OB і OC ділять кут AOD на три кути. Знайдіть кут BOC, якщо $\angle AOD=110°$, $\angle AOC=85°$, $\angle BOD=60°$.

80. Кут (ad) поділений променями b і c на три кути. Знайдіть кут (ac), якщо $\angle(ab)=28°$, $\angle(bd)=92°$, $\angle(cd)=44°$.

81. Промінь l — бісектриса кута (mn). Знайдіть кут (mn), якщо кут між бісектрисами кутів (ml) і (ln) дорівнює $70°$.

82. Промінь OB — бісектриса кута AOC, а промінь OE — бісектриса кута BOC. Знайдіть кут AOC, якщо кут AOE прямий.

Рівень В

83. Промінь OK ділить кут MON на два кути. Знайдіть кут MON, якщо кут між бісектрисами кутів MOK і KON дорівнює $40°$.

84. З даної точки проведено три промені так, що кути між будь-якими двома з них рівні. Знайдіть ці кути.

85. З даної точки проведено кілька променів так, що кут між будь-якими двома сусідніми променями дорівнює $72°$. Скільки всього променів проведено?

Повторення перед вивченням §4

Теоретичний матеріал

- паралельні прямі

5 клас

Задачі

86. На площині позначено точки A, B, C, що не лежать на одній прямій. Чи існує пряма, що проходить через точку A,

а) перетинає пряму BC, але не перетинає променя BC?

б) перетинає промінь BC, але не перетинає прямої BC?

в) не перетинає прямої BC? Висловіть припущення.

87. Усередині гострого кута ABC позначено точку D. Визначте, які з поданих тверджень є правильними:

а) існує пряма, що проходить через точку D, перетинає промінь BA і не перетинає променя BC;

б) існує пряма, що проходить через точку D, перетинає промінь BA і не перетинає прямої BC;

в) існує пряма, що проходить через точку D й не перетинає жодної з прямих BA і BC.

Чи зміняться відповіді, якщо кут ABC буде прямим; тупим; розгорнутим? Висловіть припущення.

§4 Паралельні прямі

4.1. Означення паралельних прямих

Відомо, що коли дві прямі на площині мають спільну точку, то вони перетинаються. Розглянемо тепер випадок, коли дві прямі не мають спільних точок.

Паралельний — від грецького слова «паралелос» — той, що йде поряд

Означення

Дві прямі на площині називаються **паралельними**, якщо вони не перетинаються.

Уявлення про паралельні прямі дають, наприклад, залізничні рейки або лінійки нотного стану.

На рис. 29 прямі a і b паралельні. Коротко це позначають так: $a \parallel b$. Такий запис читається: «Пряма a паралельна прямій b».

Рис. 29. Паралельні прямі

Отже, можна виділити два випадки взаємного розміщення прямих на площині: ***дві прямі на площині або паралельні, або перетинаються***.

Поряд із паралельністю прямих ми будемо розглядати також паралельність відрізків і променів.

Означення

Два відрізки називаються **паралельними**, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Рис. 30. Паралельні відрізки

Аналогічно формулюються означення паралельності двох променів, прямої і відрізка, променя і відрізка тощо.

На рис. 30 прямі AB і CD паралельні, тому відрізки AB і CD паралельні, промені BA і CD паралельні, відрізок AB паралельний прямій CD і т. д.

На практиці доволі часто треба проводити пряму, паралельну даній, — наприклад, робити розмітку дороги або креслити поля в зошиті. Чи завжди можна провести через дану точку пряму, паралельну даній? Скільки таких прямих проходить через точку, що не лежить на даній прямій? Відповідь на ці запитання дає аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда).

Аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда)

Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш ніж одну пряму, паралельну даній[1].

Ми сформулювали лише деякі з аксіом планіметрії. Більш повний перелік аксіом подано в додатку 1.

4.2. Теорема про дві прямі, паралельні третій

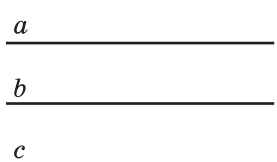


Рис. 31. Дві прямі, паралельні третій

На підставі аксіом за допомогою логічних міркувань (доведень) ми будемо отримувати нові геометричні факти. У математиці твердження, справедливість якого встановлюється шляхом доведення, називається **теоремою**. Для доведення теорем використовують означення й аксіоми, а також теореми, доведені раніше.

Отже, сформулюємо й доведемо першу теорему — теорему про паралельні прямі (рис. 31).

Теорема (про дві прямі, паралельні третій)

Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.

[1] Насправді має місце таке твердження: «Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну». Можливість провести таку пряму ми доведемо в п. 14.3.

Доведення[1]

□ Нехай a, b і c — дані прямі, причому $a \parallel c$, $b \parallel c$. Доведемо, що прямі a і b паралельні.

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді вони мають перетинатись у деякій точці C (рис. 32). Таким чином, через точку C проходять дві прямі, паралельні прямій c. Але за аксіомою паралельних прямих через точку поза даною прямою може проходити не більш ніж одна пряма, паралельна даній. Отже, наше припущення про те, що прямі a і b можуть перетинатися, хибне, тобто ці прямі паралельні. Теорему доведено. ■

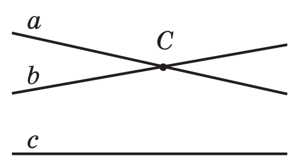


Рис. 32. До припущення про те, що прямі a і b не паралельні

Застосуємо доведену теорему для розв'язування задачі.

Задача

Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму. Доведіть.

Розв'язання

Нехай $a \parallel b$ і пряма c перетинає пряму a (рис. 33). Доведемо, що прямі b і c перетинаються. Припустимо, що ці прямі не перетинаються. У такому разі $b \parallel c$. Оскільки $c \parallel b$ і $a \parallel b$, то за теоремою про дві прямі, паралельні третій, прямі a і c паралельні. Але це неможливо, бо за умовою задачі прямі a і c перетинаються.

Таким чином, припущення про те, що $b \parallel c$, хибне. Отже, прямі b і c перетинаються, що й треба було довести.

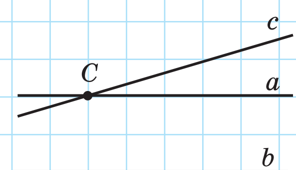


Рис. 33

[1] Початок і закінчення доведення ми будемо позначати □ і ■ відповідно.

Звернемо увагу на рис. 32, який використовувався в ході доведення теореми. Взаємне розміщення прямих a, b, c на цьому рисунку не відповідає формулюванню теореми, і це легко пояснити: рисунок відображує припущення, яке згодом виявилося хибним. Загалом, рисунки в геометричних теоремах і задачах відіграють особливу роль — те, що на них зображене, є наслідком наявних у нас відомостей, але не навпаки.

Теорема — від грецького «теорео» — розглядаю, обмірковую

Недоведені властивості геометричних фігур, навіть якщо вони здаються очевидними з рисунків, використовувати не можна. Рисунок у геометрії лише відбиває висловлені твердження та властивості, але сам по собі не є доведенням. До того ж, рисунок може не охоплювати всіх можливих варіантів взаємного розміщення елементів фігур, які маються на увазі в задачі або теоремі. Недарма геометрію називають «мистецтвом правильно міркувати на неправильних кресленнях».

4.3. Умова й висновок теореми. Доведення від супротивного

У формулюванні будь-якої теореми завжди можна чітко виділити дві частини: те, що дано (**умова**), і те, що треба довести (**висновок**). Переформулюємо теорему про дві прямі, паралельні третій, у такий спосіб: «Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то ці прямі паралельні між собою». Нам відомо, що ***дві прямі паралельні третій прямій*** — це умова теореми. Потрібно довести, що ***ці прямі паралельні між собою*** — це висновок теореми. Узагалі, виділити умову й висновок найлегше для твердження, поданого у вигляді: «Якщо... ***(умова)***, то... ***(висновок)***».

Проаналізуємо доведення теореми про дві прямі, паралельні третій. Спочатку ми припустили, що прямі a і b не паралельні, тобто що висновок теореми є хибним. Потім, спираючись на відомі властивості взаємного розміщення прямих, з'ясували, що через певну точку C проходять дві прямі, паралельні c, тобто дійшли суперечності з аксіомою паралельних прямих. На підставі цієї суперечності ми зробили висновок про те, що наше припущення було помилковим, а отже, правильним є твердження теореми.

Цей метод доведення називається ***доведенням від супротивного.***

Доведенням від супротивного ми скористалися й у задачі, яку розглядали після теореми. Але цей метод не єдиний: уже в наступному параграфі будемо застосовувати й інші методи доведень.

Метод доведення від супротивного інколи використовується як в інших науках, так і в повсякденному житті. Наприклад, лікар, щоб переконатися, що пацієнт не хворий на грип, може міркувати так: «Припустимо, що у хворого грип; тоді в нього мають бути характерні симптоми: підвищення температури, головний біль тощо. Але цих симптомів немає, тобто припущення про грип хибне. Отже, пацієнт не хворий на грип».

Схема доведення від супротивного

Твердження	
Якщо А, то В	
Доведення	
1. *Припущення.* Нехай А, але не В	Припускаємо, що умова теореми справджується, а висновок — ні
2. *Міркування*	Міркуємо, спираючись на аксіоми та раніше доведені теореми
3. *Суперечність*	Отримуємо нове твердження, що суперечить або даній умові, або одній з аксіом, або раніше доведеній теоремі
4. *Висновок.* Тоді В	Переконуємося, що наше припущення хибне, тобто дане твердження є правильним

Запитання й задачі

Усні вправи

88. Відомо, що $a \parallel b$. Чи означає це, що $b \parallel a$?

89. Два відрізки не мають спільних точок. Чи означає це, що ці відрізки обов'язково паралельні?

90. Прямі KM і EF паралельні. Чи можуть промені MK і FE перетинатися?

91. На площині проведено три паралельні прямі. Чи може якась четверта пряма:

а) перетинати тільки одну з даних прямих;

б) перетинати тільки дві з даних прямих;

в) не перетинати жодної з даних прямих?

92. Чи можна провести два промені з початком у точці поза даною прямою, які були б паралельні даній прямій? Якими мають бути ці промені?

Графічні вправи

93. За допомогою двосторонньої лінійки проведіть паралельні прямі a і b.

а) Позначте на прямій a точку A. Чи можна провести через точку A іншу пряму, паралельну прямій b? Чому?

б) Побудуйте відрізок AD, паралельний прямій b. Чи лежить точка D на прямій a?

в) Проведіть через точку A пряму c, що не збігається з прямою a. Чи перетинаються прямі b і c? Чому?

94. За допомогою двосторонньої лінійки проведіть паралельні прямі a і b.

а) Проведіть пряму c, паралельну прямій a. Чи паралельні прямі b і c? Чому?

б) Позначте на прямій c точки A, B і C. Назвіть два промені, паралельні прямій b.

Письмові вправи

Рівень А

95. Дано пряму a і точки A, B і C (рис. 34). Скільки прямих, паралельних прямій a, можна провести через дані точки? Проведіть усі такі прямі. Чи можуть вони перетинатися? Відповідь обґрунтуйте.

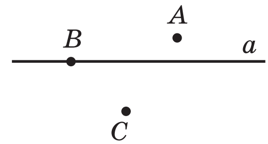


Рис. 34

96. Пряма паралельна одній із двох паралельних прямих. Чи може вона перетинати другу пряму? Відповідь обґрунтуйте.

97. Дві прямі є паралельними. Доведіть методом від супротивного, що будь-яка третя пряма не може перетинати обидві ці прямі в одній і тій самій точці.

98. Доведіть методом від супротивного твердження: «Якщо пряма паралельна одній зі сторін нерозгорнутого кута, то вона не може бути паралельною другій його стороні».

Рівень Б

99. Три паралельні шосейні траси перетинаються двома іншими паралельними трасами. Скільки перехресть утворилося?

100. На площині проведено прямі a, b, c і d, причому $a \parallel b$, $c \parallel d$. Прямі a і c перетинаються. Скільки всього точок перетину мають дані прямі?

101. Через точку, що не лежить на прямій c, проведено чотири прямі. Скільки з них можуть перетинати пряму c? Розгляньте всі можливі випадки.

102. На площині проведено чотири прямі, причому три з них мають одну спільну точку. Скільки пар паралельних прямих може утворитися на площині? Розгляньте всі можливі випадки.

103. Пряма a паралельна прямій b і не паралельна прямій c. Доведіть, що прямі b і c перетинаються.

104. Прямі a і b перетинаються, пряма c паралельна прямій b. Доведіть, що будь-яка пряма, паралельна прямій a, перетинає прямі b і c.

Рівень В

105. На площині проведено кілька прямих, причому ніякі три з них не перетинаються в одній точці. Усього утворилися три точки перетину. Скільки прямих проведено? Розгляньте всі можливі випадки.

106. На площині проведено три прямі. При цьому утворилися дві точки перетину. Доведіть, що серед даних прямих є паралельні.

107. На площині проведено чотири прямі. При цьому утворилося шість точок перетину. Доведіть, що серед даних прямих немає паралельних.

Повторення перед вивченням § 5

Теоретичний матеріал

- доповняльні промені
- вимірювання кутів

п. 1.3; 3.3

Задачі

108. Промені b і c ділять розгорнутий кут (ad) на три кути. Знайдіть кут (bd), якщо $\angle(ac)=135°$, $\angle(bc)=20°$. Скільки розв'язків має задача?

109. Промінь OA_1 є доповняльним до сторони OA кута AOB. Знайдіть кут AOB, якщо він дорівнює куту A_1OB.

§ 5 Суміжні кути та їхні властивості

5.1. Означення суміжних кутів

У попередніх параграфах розглядалися види кутів залежно від їхньої градусної міри. Перейдемо до вивчення кутів, що мають спільні елементи.

Нехай на прямій точка O лежить між точками A і B, а C — довільна точка поза прямою AB (рис. 35). Тоді кути AOC і COB мають спільну сторону, а сторони OA і OB даних кутів є доповняльними променями.

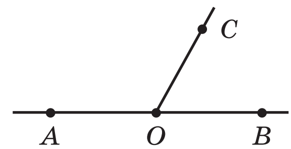


Рис. 35. Кути AOC і COB суміжні

Означення

Два кути називаються **суміжними**, якщо вони мають спільну сторону, а інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

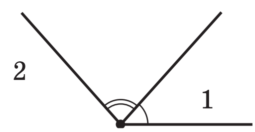


Рис. 36. Кути 1 і 2 мають спільну сторону, але не суміжні

Пропуск хоч однієї умови у формулюванні означення неприпустимий; це може призвести до того, що буде описано інший геометричний об'єкт. Так, якщо сторони двох кутів не є доповняльними променями, то навіть у разі наявності спільної сторони такі кути не суміжні (рис. 36). Не є суміжними й кути, що не задовольняють першу умову означення, тобто не мають спільної сторони (рис. 37).

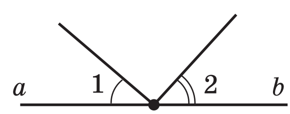


Рис. 37. Сторони a і b кутів 1 і 2 — доповняльні промені, але ці кути не суміжні

5.2. Теорема про суміжні кути. Наслідки з теореми

Теорема (про суміжні кути)

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Доведення

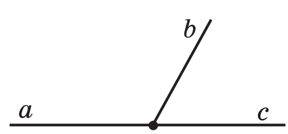


Рис. 38. Сума кутів (ab) і (bc) дорівнює 180°

□ Нехай кути (ab) і (bc) — дані суміжні кути (рис. 38). Тоді за означенням суміжних кутів промені a і c є доповняльними, тобто кут (ac)

розгорнутий, а його градусна міра дорівнює 180°. Промінь b ділить кут (ac) на два кути, і за аксіомою вимірювання кутів $\angle(ab)+\angle(bc)=\angle(ac)=180^\circ$. Теорему доведено. ■

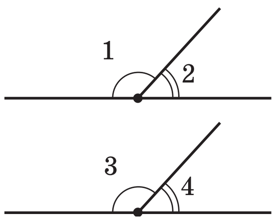


Рис. 39. Кути, суміжні з рівними кутами, також рівні

Сформулюємо тепер кілька тверджень, які легко обґрунтувати за допомогою доведеної теореми.

1. ***Якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути також рівні.***

Справді, за теоремою про суміжні кути $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=180^\circ$ (рис. 39). Якщо $\angle 1=\angle 3$, то $180^\circ-\angle 1=180^\circ-\angle 3$, тобто $\angle 2=\angle 4$.

2. ***Два кути, суміжні з одним і тим самим кутом, рівні.***

На рис. 40 кути 1 і 2, а також кути 1 і 3 є суміжними. Оскільки сума суміжних кутів дорівнює 180°, то $\angle 2=\angle 3=180^\circ-\angle 1$.

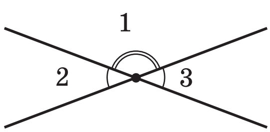


Рис. 40. Кути, суміжні з одним і тим самим кутом, рівні

3. ***Кут, суміжний із прямим кутом, також прямий. Кут, суміжний із тупим кутом, гострий. Кут, суміжний із гострим кутом, тупий.***

Ці твердження випливають із теореми про суміжні кути, оскільки $180^\circ-90^\circ=90^\circ$ (рис. 41), а якщо два нерівні кути в сумі складають 180°, то один із них більший за 90° (тобто тупий), а другий — менший за 90° (тобто гострий).

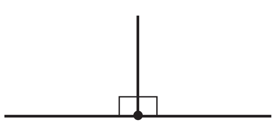


Рис. 41. Кут, суміжний із прямим кутом, прямий

У математиці твердження, що безпосередньо випливають із теорем (або аксіом), називають **наслідками**. Обґрунтовуючи наслідки 1–3, ми щоразу згадували теорему про суміжні кути: або вказували її назву, або переказували зміст. Такі звернення до відомого твердження з метою обґрунтування нового називають **посиланнями**. Розв’язуючи геометричну задачу або доводячи нову теорему, необхідно посилатися на раніше вивчені означення, аксіоми, теореми та їхні наслідки, а також на дані, що містяться в умові задачі або випливають із неї. Наприклад, під час доведення теореми про суміжні кути ми посилалися на означення суміжних кутів, розгорнутого кута й аксіому вимірювання кутів, а під час доведення теореми про дві прямі, паралельні третій, — на аксіому паралельних прямих.

Задача

Доведіть, що коли два суміжні кути рівні, то вони прямі.

Розв'язання

Якщо $\angle 1$ і $\angle 2$ суміжні, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (за теоремою про суміжні кути). Оскільки за умовою задачі $\angle 1 = \angle 2$, то кожний із цих кутів дорівнює $180° : 2 = 90°$, тобто дані кути є прямими, що й треба було довести.

Запитання й задачі

Усні вправи

110. Два кути мають спільну сторону. Чи означає це, що:
- а) ці кути мають спільну вершину;
- б) сума цих кутів дорівнює $180°$?

111. Чи можуть обидва суміжні кути бути:
- а) гострими;
- б) прямими;
- в) тупими?

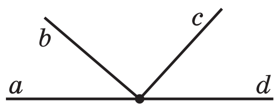


Рис. 42

112. Промені b і c ділять розгорнутий кут (ad) на три кути (рис. 42). Скільки пар суміжних кутів при цьому утворилося? Назвіть ці кути.

113. Рисунок, на якому зображено суміжні кути, перегнули по прямій, що містить їхню спільну сторону. При цьому інші сторони даних кутів збіглися. Знайдіть дані суміжні кути.

114. Знайдіть кут, суміжний із кутом, який дорівнює: $30°$; $60°$; $90°$; $135°$.

Графічні вправи

115. Накресліть розгорнутий кут (ab).

а) З вершини цього кута проведіть промінь c так, щоб кут (ac) був тупим. Назвіть утворені суміжні кути.

б) Виміряйте транспортиром кут (cb) і обчисліть градусну міру кута (ac), користуючись теоремою про суміжні кути.

в) Проведіть промінь d, що ділить кут (ac) на два кути. Скільки пар суміжних кутів утворилося на рисунку?

116. Накресліть кут ABC, що дорівнює $45°$.

а) Проведіть промінь BD так, щоб кути DBA і ABC були суміжними. Знайдіть градусну міру кута DBA.

б) Проведіть промінь BM, що ділить кут DBA на два кути, один із яких дорівнює куту ABC. Скількома способами це можна зробити? Чи будуть рівні кути суміжними?

Письмові вправи

Рівень А

117. Дві прямі перетинаються. Скільки пар суміжних кутів при цьому утворилося?

118. Через вершину нерозгорнутого кута проведено пряму, що містить його бісектрису. Скільки пар суміжних кутів при цьому утворилося?

119. Знайдіть суміжні кути, якщо:
а) їхні градусні міри відносяться як $5:31$;
б) їхня різниця дорівнює $70°$.

120. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них:
а) утричі більший, ніж другий;
б) на $20°$ менший, ніж другий.

121. Бісектриса ділить кут AOB на два кути, один із яких дорівнює $50°$. Знайдіть градусну міру кута, суміжного з кутом AOB.

122. Кути 1 і 2, а також кути 3 і 4 — дві пари суміжних кутів. Порівняйте кути 2 і 4, якщо $\angle 1 > \angle 3$.

123. На рис. 43 $\angle AOB = 72°$, $\angle COD = 37°$. Знайдіть кут BOC.

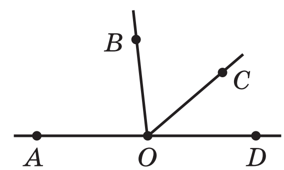


Рис. 43

Рівень Б

124. Знайдіть даний кут, якщо сума двох суміжних із ним кутів дорівнює $240°$.

125. Бісектриса кута утворює з променем, доповняльним до сторони даного кута, кут $130°$. Знайдіть даний кут.

126. Знайдіть кут, сторона якого утворює з променем, доповняльним до бісектриси даного кута, кут $165°$.

127. Промені b і c ділять розгорнутий кут (ad) на три кути (рис. 42). Знайдіть найбільший із цих кутів, якщо $\angle(ac) = 160°$, $\angle(bd) = 140°$.

128. Знайдіть кут BOC (рис. 43), якщо $\angle BOD = 112°$, $\angle AOC = 138°$.

Рівень В

129. Різниця двох суміжних кутів відноситься до одного з них як $5:2$. Знайдіть ці суміжні кути.

130. Бісектриса даного кута утворює з його стороною кут, який дорівнює куту, суміжному з даним. Знайдіть даний кут.

131. Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

132. Сума двох кутів, що мають спільну сторону, дорівнює $180°$. Чи обов'язково ці кути є суміжними?

133. Якщо бісектриси кутів AOB і BOC утворюють прямий кут, то точки A, O і C лежать на одній прямій. Доведіть.

Повторення перед вивченням §6

Теоретичний матеріал

- перпендикулярні прямі — 6 клас
- вимірювання кутів — п. 3.3

Задачі

134. Кути (mn) і (kp) є суміжними з кутом (np). Серед променів m, n, k, p назвіть пари доповняльних променів.

135. Кути (ab) і (bc) суміжні. Кути (bc) і (cd) також суміжні, причому $\angle(cd) = 32°$. Знайдіть кути (ad) і (ab).

§ 6 Вертикальні кути та їхні властивості. Перпендикулярні прямі. Кут між двома прямими

6.1. Означення вертикальних кутів

Розглянемо ще один випадок взаємного розміщення кутів зі спільними елементами.

Вертикальний — від латинського «вертикаліс» — вершинний

Означення

Два кути називаються **вертикальними**, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

На рис. 44 прямі AC і BD перетинаються в точці O. Сторони OD і OA кута AOD є доповняльними променями сторін OB і OC кута BOC, тому ці кути вертикальні. Вертикальними є також кути AOB і DOC.

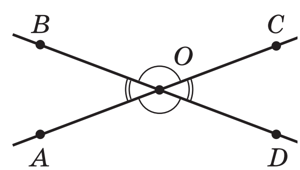


Рис. 44. У результаті перетину двох прямих утворюються дві пари вертикальних кутів

Таким чином, ***у результаті перетину двох прямих***[1] ***утворюються дві пари вертикальних кутів.***

Наочне уявлення про вертикальні кути дають, наприклад, звичайні ножиці.

6.2. Теорема про вертикальні кути. Кут між прямими

Основну властивість вертикальних кутів передає така теорема.

Теорема (про вертикальні кути)

Вертикальні кути рівні.

---

[1] Тут і далі, кажучи про кути, утворені в результаті перетину двох прямих, ми матимемо на увазі нерозгорнуті кути.

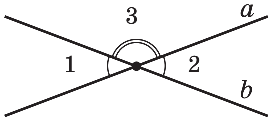


Рис. 45. Вертикальні кути є суміжними з одним і тим самим кутом

Доведення

☐ Нехай $\angle 1$ і $\angle 2$ — вертикальні кути, що утворилися в результаті перетину прямих a і b (рис. 45). Розглянемо кут 3, сторонами якого також є півпрямі прямих a і b. Кути 1 і 2 суміжні з кутом 3 (за означенням суміжних кутів), тому за наслідком теореми про суміжні кути $\angle 1 = \angle 2$. Теорему доведено. ■

Задача

Сума двох кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, дорівнює 100°. Знайдіть усі утворені кути.

Розв'язання

За умовою задачі в результаті перетину двох прямих утворилися два кути, сума яких становить 100°. Ці кути можуть бути або суміжними, або вертикальними. Сума суміжних кутів дорівнює 180°, отже, дані кути не можуть бути суміжними, тобто вони є вертикальними.

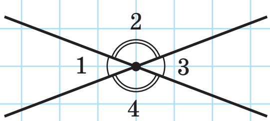


Рис. 46

Нехай $\angle 1 + \angle 3 = 100°$ (рис. 46).

Оскільки вертикальні кути рівні, то кожний із двох даних кутів дорівнює $100° : 2 = 50°$. Таким чином, $\angle 1 = \angle 3 = 50°$.

Оскільки кути 1 і 2 суміжні, то $\angle 2 = 180° - \angle 1 =$
$= 180° - 50° = 130°$ (за теоремою про суміжні кути).

Оскільки кути 2 і 4 вертикальні, то $\angle 4 = \angle 2 = 130°$ (за теоремою про вертикальні кути).

Відповідь: 50°; 130°; 50°; 130°.

Означення

Кутом між двома прямими, що перетинаються, називається менший із кутів, що утворилися в результаті перетину цих прямих.

На рис. 47 дві прямі, перетинаючись, утворюють два кути по $30°$ і два кути по $150°$. Кут між цими прямими за означенням дорівнює $30°$ (інакше кажуть: прямі ***перетинаються під кутом*** $30°$).

Очевидно, що коли в результаті перетину двох прямих утворюються чотири рівні кути, то всі вони дорівнюють $90°$, тобто ці прямі перетинаються під прямим кутом.

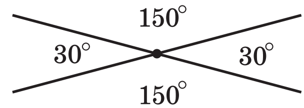


Рис. 47. Дві прямі перетинаються під кутом 30°

6.3. Перпендикулярні прямі

Означення

Дві прямі називаються **перпендикулярними**, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

Перпендикулярний – від латинського «перпендикуларіс» – прямовисний

На рис. 48 прямі a і b перпендикулярні. Коротко це позначають так: $a \perp b$.

Відрізки або промені називаються **перпендикулярними**, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

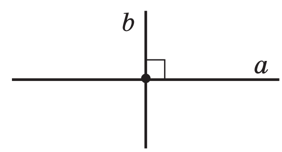


Рис. 48. Прямі a і b перпендикулярні

Доведемо важливе твердження, що пов'язує поняття перпендикулярності і паралельності прямих.

Теорема (про дві прямі, перпендикулярні до третьої)

Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні.

Твердження теореми ілюструє рис. 49. На цьому рисунку $a \perp c$, $b \perp c$, $a \parallel b$.

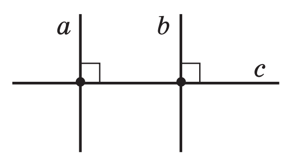


Рис. 49. Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні

Доведення

□ Нехай дано прямі A_1A_2 і B_1B_2, перпендикулярні до прямої AB. Доведемо методом від супротивного, що $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

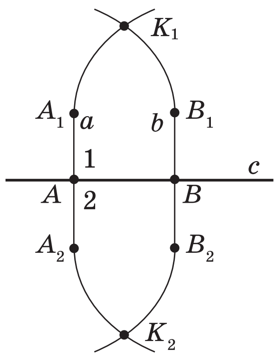


Рис. 50. До припущення про те, що прямі A_1A_2 і B_1B_2 перетинаються

Припустимо, що ці прямі не паралельні. Тоді вони перетинаються в деякій точці K_1 (рис. 50).

Перегнемо рисунок по прямій AB. Оскільки прямі кути 1 і 2 рівні, то в результаті перегинання промінь AA_1 суміститься з променем AA_2. Аналогічно промінь BB_1 суміститься з променем BB_2. Тому точка K_1, у якій перетинаються ці прямі, має суміститися з деякою точкою K_2, що також лежить на цих прямих. Таким чином, через точки K_1 і K_2 проходять дві прямі A_1A_2 і B_1B_2, що неможливе за аксіомою проведення прямої. Отже, наше припущення хибне, тобто прямі A_1A_2 і B_1B_2 паралельні.

Теорему доведено. ■[1]

Властивість, описана в теоремі, використовується для побудови паралельних прямих за допомогою лінійки та косинця (рис. 51). Двічі прикладаючи косинець до лінійки, можна провести дві прямі, перпендикулярні до краю лінійки. За доведеною теоремою такі прямі є паралельними.

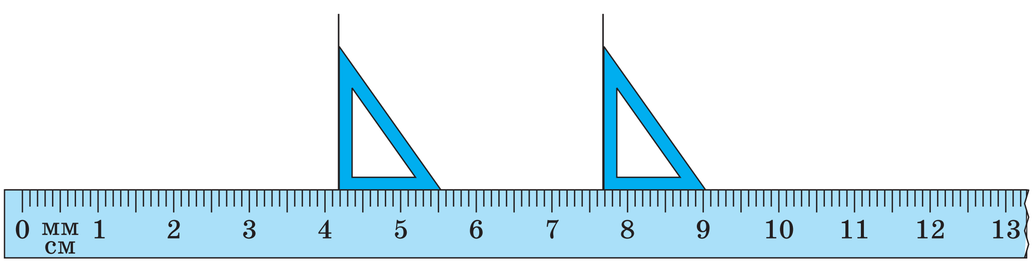


Рис. 51. Побудова паралельних прямих за допомогою лінійки та косинця

[1] У ході доведення цієї теореми можна не розглядати перегинання, а скористатися розширеним переліком аксіом, наведених на с. 213–214.

Запитання й задачі

Усні вправи

136. Чи можуть дві прямі, перетинаючись, утворити три гострі кути; тільки один тупий кут; чотири прямі кути?

137. Чи є правильним твердження: «Два рівні кути зі спільною вершиною є вертикальними»?

138. Кути 1 і 2 утворилися в результаті перетину двох неперпендикулярних прямих. Визначте, якими є ці кути — суміжними або вертикальними, якщо:

а) їхня сума більша за $180°$;

б) лише один із них гострий;

в) їхня сума менша, ніж сума інших двох отриманих кутів.

139. α і β — градусні міри двох суміжних кутів. Чи можуть α і β бути градусними мірами двох вертикальних кутів? У якому випадку?

140. У результаті перетину двох прямих утворився тупий кут α. Чому дорівнює кут між даними прямими?

141. У результаті перетину двох прямих утворилися чотири кути, жоден із яких не є гострим. Під яким кутом перетинаються дані прямі?

142. Через точку перетину двох перпендикулярних прямих a і b проведено пряму c. Чи може вона бути перпендикулярною до якої-небудь із прямих a і b?

Графічні вправи

143. Накресліть прямі a і b, що перетинаються в точці O під кутом $80°$.

а) Виділіть кольором усі пари вертикальних кутів, що утворилися на рисунку. Якими є градусні міри цих кутів?

б) Проведіть через точку O пряму, перпендикулярну до прямої a. Чи буде ця пряма перпендикулярною до прямої b?

144. Накресліть перпендикулярні прямі a і b, що перетинаються в точці O.

а) Позначте на прямій a точку B. За допомогою косинця проведіть через цю точку пряму c, перпендикулярну до прямої a.

б) Чи паралельні прямі b і c? Чому?

Письмові вправи

Рівень А

145. Один із кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, дорівнює $125°$. Знайдіть решту кутів. Чому дорівнює кут між цими прямими?

146. Знайдіть усі кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, якщо:

а) бісектриса відтинає від одного з них кут $23°$;

б) один із цих кутів утричі більший, ніж інший.

147. Знайдіть усі кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, якщо:

а) сума двох із них дорівнює $320°$;

б) один із цих кутів на $50°$ менший за інший.

148. Перпендикулярні прямі AB і CD перетинаються в точці K. Назвіть:

а) три відрізки, перпендикулярні до прямої CD;

б) чотири промені, перпендикулярні до відрізка AK.

149. Один із кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, є тупим. Доведіть методом від супротивного, що жоден із решти утворених кутів не може бути прямим.

150. У результаті перетину двох прямих утворилися чотири кути, один із яких є прямим. Доведіть, що решта кутів також прямі.

151. Прямі a і b перпендикулярні. Пряма c проходить через точку їхнього перетину й утворює з прямою a кут $70°$. Знайдіть кут між прямими c і b.

152. Пряма c проходить через точку перетину прямих a і b, причому прямі a і b перетинаються під кутом $25°$, прямі a і c перпендикулярні. Знайдіть кут між прямими b і c.

Рівень Б

153. Знайдіть усі кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, якщо:

а) сума трьох із них дорівнює $295°$;

б) градусні міри двох із цих кутів відносяться як $4:5$.

154. Знайдіть кут між двома прямими, які перетинаються, якщо:

а) сума двох утворених кутів на 80° менша, ніж сума двох інших кутів;

б) один із кутів, що утворилися, удвічі менший за суму решти трьох кутів.

155. Три прямі перетинаються в одній точці так, що два з кутів, які утворилися в результаті перетину, дорівнюють 56° і 39° (рис. 52). Знайдіть решту чотири кути між сусідніми променями.

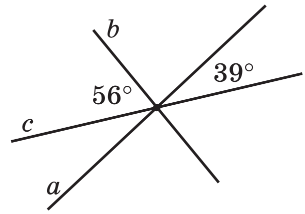


Рис. 52

156. Дві прямі перетинаються в точці O. Бісектриса одного з кутів, що утворилися в результаті перетину, складає з однією з даних прямих кут 72°. Знайдіть кут, під яким перетинаються дані прямі.

157. Дано прямі a, b, c і d, причому $a \perp c$, $b \perp c$, $a \parallel d$. Доведіть, що прямі b і d паралельні.

158. Прямі a і b перетинаються, а пряма c перпендикулярна до прямої a. Доведіть, що прямі b і c не можуть бути перпендикулярними.

Рівень В

159. Один із кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, дорівнює сумі двох інших кутів. Знайдіть кут між даними прямими.

160. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів є доповняльними півпрямими.

161. Два рівні кути мають спільну вершину, а їхні бісектриси є доповняльними променями. Доведіть, що ці кути вертикальні.

162. Через точку перетину двох перпендикулярних прямих проведено третю пряму. Знайдіть найменший із тупих кутів, що утворилися в результаті перетину цих трьох прямих, якщо найбільший із утворених тупих кутів дорівнює 165°.

163. Через точку на площині проведено п'ять прямих. Яка найбільша кількість пар перпендикулярних прямих може бути серед них?

Повторення перед вивченням § 7

Теоретичний матеріал

- трикутник
- рівні відрізки
- рівні кути

5 клас

пп. 2.2; 3.2

Задачі

164. Відрізки AB і CD лежать на одній прямій і мають спільну середину O. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $OA = 4$ см, $AC = 12$ см. Скільки розв'язків має задача?

165. Кути (ab) і (cd) мають спільну вершину та спільну бісектрису l. Знайдіть кут (cb), якщо $\angle(ab) = 50°$, $\angle(dl) = 10°$. Скільки розв'язків має задача?

Онлайн-тренування для підготовки до контрольної роботи № 1

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 1

1. На промені з початком у точці A побудуйте відрізки AB і AC так, щоб $AB = 8$ см, $AC = 5$ см.

а) Яка з трьох даних точок лежить між двома іншими?

б) Яку довжину має відрізок BC?

2. Промінь OL ділить кут MON на два кути так, що $\angle MOL = 84°$ і $\angle LON = 18°$. Промінь OK — бісектриса кута MON. Знайдіть кут KOL.

3. Прямі a і b перетинаються, пряма c паралельна прямій a. Доведіть методом від супротивного, що прямі b і c не паралельні.

4. Різниця двох суміжних кутів дорівнює одному з них. Знайдіть ці суміжні кути.

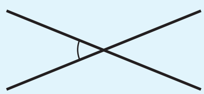
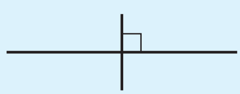
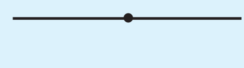
5. Сума трьох кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, на $60°$ більша, ніж четвертий кут. Знайдіть кут між даними прямими.

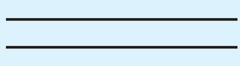
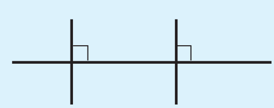
6. Кути AOB і COB суміжні, причому $\angle AOB = 108°$. З точки O проведено промінь OD так, що $\angle COD = 126°$. Чи є промінь OD бісектрисою кута AOB? Відповідь обґрунтуйте.

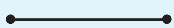
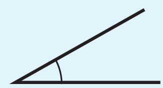
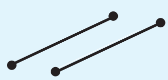
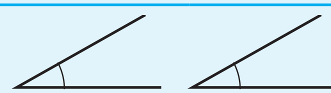
Підсумки

ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ I

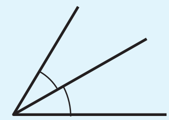
ТОЧКА І ПРЯМА	
Аксіома проведення прямої Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну	***Аксіома розміщення точок на прямій*** Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ	
Перетинаються	**Паралельні**
 **Кутом між двома прямими**, які перетинаються, називається менший із кутів, що утворилися в результаті перетину цих прямих	 Дві прямі на площині називаються **паралельними**, якщо вони не перетинаються
 **Перпендикулярними прямими** називаються дві прямі, що перетинаються під прямим кутом	 ***Аксіома паралельних прямих*** Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш ніж одну пряму, паралельну даній

ТЕОРЕМИ ПРО ПАРАЛЕЛЬНІ Й ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ	
Теорема про дві прямі, паралельні третій  Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою	***Теорема про дві прямі, перпендикулярні до третьої***  Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні

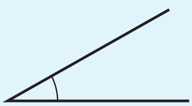
<table>
<tr><th colspan="2">ПРОМІНЬ</th></tr>
<tr><td>
Променем називається частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать по один бік від певної даної на ній точки (початку променя), а також самої цієї точки</td><td>
Доповняльними променями називаються два різні промені однієї прямої зі спільною початковою точкою</td></tr>
<tr><th>ВІДРІЗОК</th><th>КУТ</th></tr>
<tr><td>
Відрізком називається частина прямої, що складається з двох заданих точок цієї прямої (кінців відрізка) й усіх точок, що лежать між ними</td><td>
Кутом називається геометрична фігура, що складається з двох променів (сторін кута), які виходять з однієї точки (вершини кута)</td></tr>
<tr><td>
Рівними відрізками називаються відрізки, які суміщаються накладанням</td><td>
Рівними кутами називаються кути, які суміщаються накладанням</td></tr>
<tr><td>Аксіоми вимірювання та відкладання відрізків
• Кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом у заданих одиницях вимірювання. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які відрізок ділиться будь-якою його точкою
• На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один</td><td>Аксіоми вимірювання та відкладання кутів
• Кожний кут має градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює $180°$. Якщо промінь ділить даний кут на два кути, то градусна міра даного кута дорівнює сумі градусних мір двох отриманих кутів
• Від будь-якого променя даної прямої можна відкласти в заданий бік від прямої кут із заданою градусною мірою, меншою за $180°$, і тільки один</td></tr>
</table>

Серединою відрізка називається точка відрізка, що ділить його навпіл

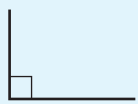


Бісектрисою кута називається промінь, що виходить із вершини кута й ділить кут навпіл (тобто на два рівні кути)

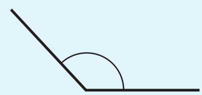
ВИДИ КУТІВ (за градусною мірою)



Гострий кут — кут, менший за 90°



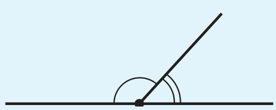
Прямий кут — кут, який дорівнює 90°



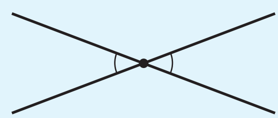
Тупий кут — кут, більший за 90°, але менший за 180°

Розгорнутий кут — кут, який дорівнює 180°

КУТИ, ЩО УТВОРЮЮТЬСЯ В РЕЗУЛЬТАТІ ПЕРЕТИНУ ДВОХ ПРЯМИХ



Суміжні кути — два кути, що мають спільну сторону, а інші сторони цих кутів є доповняльними променями



Вертикальні кути — два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями сторін другого

Теорема про суміжні кути

Сума суміжних кутів дорівнює 180°

Теорема про вертикальні кути

Вертикальні кути рівні

Наслідки з теореми про суміжні кути

1. Якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути також рівні.
2. Два кути, суміжні з одним і тим самим кутом, рівні.
3. Кут, суміжний із прямим кутом, також прямий. Кут, суміжний із тупим кутом, гострий. Кут, суміжний із гострим кутом, тупий

Контрольні запитання

1. Назвіть основні геометричні фігури на площині. Як вони позначаються?

2. Сформулюйте аксіому проведення прямої.

3. Сформулюйте аксіому розміщення точок на прямій.

4. Яка фігура називається променем (півпрямою)? Як позначаються промені?

5. Які промені називаються доповняльними?

6. Дайте означення відрізка. Як позначається відрізок?

7. Які відрізки називаються рівними? Як порівняти два відрізки?

8. Сформулюйте аксіоми вимірювання та відкладання відрізків. Як порівняти два відрізки із заданими довжинами?

9. Дайте означення середини відрізка.

10. Дайте означення кута. Як позначаються кути?

11. Який кут називається розгорнутим?

12. Які кути називаються рівними? Як порівняти два кути?

13. Сформулюйте аксіоми вимірювання та відкладання кутів. Як порівняти два кути із заданими градусними мірами?

14. Назвіть одиницю вимірювання кутів. Які кути називаються гострими, прямими, тупими?

15. Дайте означення бісектриси кута.

16. Дайте означення паралельних прямих. Назвіть два випадки взаємного розміщення прямих на площині. Які відрізки (промені) називаються паралельними?

17. Сформулюйте аксіому паралельних прямих. У чому полягає відмінність аксіом від теорем? Наведіть приклади аксіом із курсу геометрії.

18. Сформулюйте й доведіть теорему про дві прямі, паралельні третій.

19. У чому полягає метод доведення від супротивного? Опишіть етапи міркувань у ході доведення від супротивного.

20. Дайте означення суміжних кутів.

21. Сформулюйте й доведіть теорему про суміжні кути.

22. Сформулюйте наслідки з теореми про суміжні кути.

23. Дайте означення вертикальних кутів.

24. Сформулюйте й доведіть теорему про вертикальні кути.

25. Дайте означення кута між прямими. Скільки гострих, тупих, прямих кутів може утворитися в результаті перетину двох прямих?

26. Дайте означення перпендикулярних прямих.

27. Сформулюйте й доведіть теорему про дві прямі, перпендикулярні до третьої.

Додаткові задачі

166. На прямій позначено точки A і C так, що $AC = 3$. Точка B лежить на відрізку AC, причому $AB : BC = 2 : 1$. Знайдіть на даній прямій усі точки D такі, що $AD + BD = CD$.

167. Точки A і B рухаються по прямій. Визначте, на яку величину переміститься середина відрізка AB, якщо точка A переміститься на 3 одиниці, а точка B — на 7 одиниць. Розгляньте випадки руху точок в одному напрямку й у протилежних напрямках.

168. На лінійці позначено три поділки: 0 см, 2 см і 5 см. Як за допомогою такої лінійки побудувати відрізок завдовжки 6 см?

169. Як за допомогою косинця з кутом $35°$ відкласти кут $40°$?

170. Дано шаблон кута в $17°$. Як за допомогою цього шаблона побудувати:

а) кут $7°$;

б) кут $10°$?

171. Як за допомогою шаблона кута в $27°$ побудувати дві перпендикулярні прямі?

172. Скільки кутів, менших за $180°$, зображено на рис. 53?

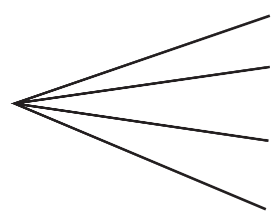


Рис. 53

173. Промені b і c ділять кут (ad) на три рівні кути. Доведіть, що бісектриса кута (bc) є бісектрисою кута (ad).

174. Точка M лежить поза внутрішньою областю кута AOB. Промінь OC — бісектриса цього кута. Доведіть, що кут MOC дорівнює півсумі кутів AOM і BOM.

175. Точка M лежить у внутрішній області кута AOB. Промінь OC — бісектриса цього кута. Доведіть, що кут MOC дорівнює модулю піврізниці кутів AOM і BOM.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Найдавніша наука. Геометрія, як і математика загалом, зароджувалася з потреб практичної діяльності. Адже скрізь, де жили й працювали люди, необхідно було вимірювати, обчислювати, міркувати тощо. Перші документальні свідчення про геометричні знання дійшли до нас зі Стародавнього Єгипту. Води Нілу щороку затоплювали майже всі земельні ділянки, отже, єгиптянам доводилося їх знову розмежовувати. Так у процесі роботи люди дізнавалися про найпростіші властивості геометричних фігур.

Становлення геометрії. Становлення геометрії як власне науки пов'язане з працями давньогрецьких учених: Фалеса (орієнт. 625–547 рр. до н. е.), Піфагора (орієнт. 570–500 рр. до н. е.), Евдокса (орієнт. 408–355 рр. до н. е.). Вони сформулювали й довели багато основних геометричних тверджень.

Евклід

Однією з найвидатніших постатей в історії геометрії заслужено вважається Евклід Александрійський (орієнт. 330–275 рр. до н. е.). Його праця «Начала» стала підручником, за яким вивчали геометрію протягом майже двох тисяч років. Евклід першим застосував саме той підхід до викладу геометрії, яким користуємося зараз ми: спочатку сформулював основні означення й властивості найпростіших фігур (аксіоми), а потім, спираючись на них, довів багато інших тверджень.

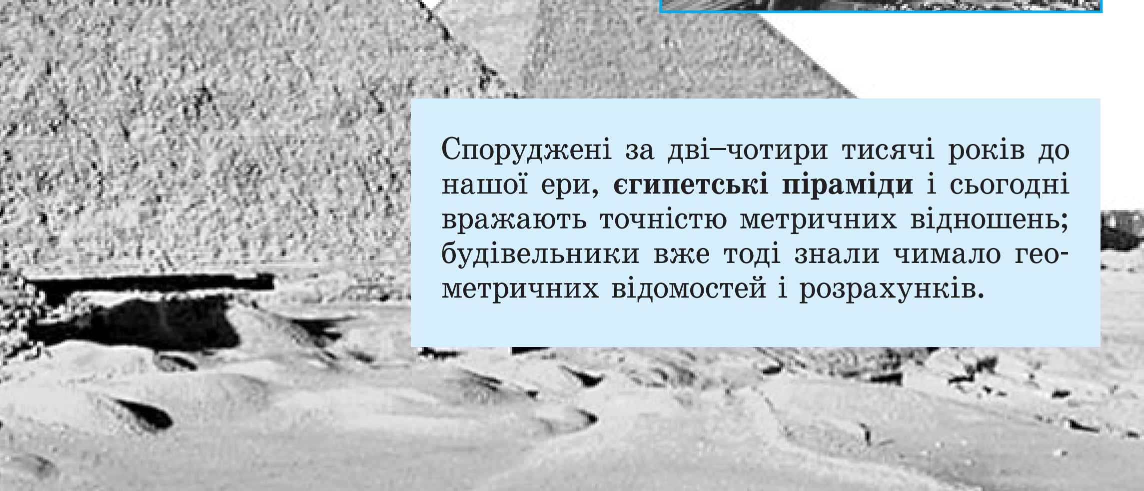
Геометрія в Україні. Цікаві сторінки історії розвитку геометрії, зокрема її викладання в школі, пов'язані з Україною. Саме тут в одній із харківських гімназій наприкінці XIX ст. розпочинав свою діяльність відомий педагог Андрій Петрович Кисельов (1852–1940), за підручником якого вивчали геометрію протягом майже 60 років.

А. П. Кисельов

О. В. Погорєлов

Професор Харківського університету Олексій Васильович Погорєлов (1919—2002) збагатив сучасну геометрію новітніми дослідженнями та створив шкільний підручник, за яким навчалося кілька поколінь учнів.

Дослідження та відкриття вчених-геометрів застосовуються в багатьох галузях людської діяльності. Геометрія стала елементом загальнолюдської культури — адже без знання основ геометрії неможливо уявити собі сучасну освічену людину.



Споруджені за дві–чотири тисячі років до нашої ери, **єгипетські піраміди** і сьогодні вражають точністю метричних відношень; будівельники вже тоді знали чимало геометричних відомостей і розрахунків.

Тематика повідомлень та рефератів до розділу I

1. Вимірювання відстаней і кутів на місцевості.
2. Походження основних геометричних термінів.
3. Система геометричних аксіом — від Евкліда до сьогодення.
4. О. В. Погорєлов — видатний український геометр.
5. Логічна правильність означень.
6. Аналогія як форма умовиводу.

Рекомендовані джерела інформації

1. Математична хрестоматія. — К. : Рад. шк., 1970. — Т. 1, 2.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII–VIII кл. — М. : Просвещение, 1982.
3. Шрейдер Ю. А. Что такое расстояние? (Популярные лекции по математике, вып. 38). — М. : Физматгиз, 1963.
4. Перельман Я. И. Занимательная геометрия. — М. : Физматгиз, 1959.
5. Гетманова А. Д. Логика. — М. : Дрофа, 1995.
6. Интернет-библиотека МЦНМО. http://www.mccme.ru/free-books/
7. Гранд геометрии. А. В. Погорелов. http://kharkov.vbelous.net/avp/

Відеоматеріали за розділом I

Додатки

Додаток 1. Про аксіоми геометрії

У розділі I ви познайомилися з елементарними геометричними фігурами: точкою і прямою, а також променем, відрізком і кутом. Їхні основні властивості — аксіоми — не доводяться, але є фундаментом для доведення всіх інших тверджень.

Першу спробу логічно обґрунтувати геометрію за допомогою систематизованого переліку вихідних положень (аксіом, або постулатів) здійснив давньогрецький математик Евклід у своїй славнозвісній книзі «Начала». Протягом багатьох століть учені-геометри спиралися саме на евклідові аксіоми. Але в XIX–XX ст., після створення Лобачевським неевклідової геометрії, дослідження системи геометричних аксіом вийшли на якісно новий рівень. Одним із тих, хто здійснив помітний внесок у вдосконалення аксіоматики, був видатний український математик Олексій Васильович Погорєлов. У своїй фундаментальній праці «Основи геометрії» (1983) він розробив власну вдосконалену систему аксіом евклідової геометрії, що подолала низку істотних труднощів, які виникли у зв'язку з введенням поняття міри для відрізків і кутів. Понад те, О. В. Погорєлов запропонував спрощений варіант геометричної аксіоматики, призначений саме для викладання геометрії в школі. Цей варіант покладено в основу підручника «Геометрія», за яким понад чверть століття вивчали й, без сумніву, надалі вивчатимуть геометрію в школі.

Ось яку систему аксіом шкільного курсу запропонував О. В. Погорєлов.

I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну.

II. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

III. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

IV. Пряма розбиває площину на дві півплощини. Якщо кінці відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму. Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму.

V. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

VI. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один.

VII. Від будь-якої півпрямої в дану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою за $180°$, і тільки один.

VIII. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, в заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

IX. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більш ніж одну пряму, паралельну даній.

Цієї системи аксіом ми дотримуємось і в цьому підручнику, зважаючи на прийняту термінологію. Деякі аксіоми сформульовано в розділі I, інші аксіоми не формулювались, проте фактично використовувались у міркуваннях. Зазначимо, що автори не ставили за мету подавати в цьому підручнику абсолютно досконалу й логічно завершену систему аксіом, а зосередили основну увагу на практичному застосуванні основних властивостей елементарних геометричних фігур у доведенні теорем і розв'язуванні задач. Надалі, у ході вивчення властивостей фігур у просторі, формулювання деяких аксіом буде уточнено, а саму систему аксіом — розширено.

Загалом же, система аксіом має відповідати умовам ***незалежності*** (не містити аксіом, які можна вивести за допомогою інших аксіом), ***несуперечливості*** (не мати явних або прихованих суперечностей) і ***повноти*** (містити достатню кількість аксіом, щоб довести основні твердження). Дослідження проблем побудови таких систем аксіом є змістом одного з розділів сучасної геометрії.

Додаток 2. Метод допоміжного трикутника*

Метод допоміжного трикутника застосовується під час розв'язування багатьох задач на побудову. Використовуючи цей метод, необхідно дотримуватися такої послідовності дій:

1) припустивши, що шуканий трикутник побудовано, виконати рисунок-ескіз і знайти на ньому допоміжний трикутник, спосіб побудови якого відомий (або отримати такий трикутник шляхом додаткових побудов);
2) з'ясувати, які вершини шуканого трикутника ми дістанемо, побудувавши допоміжний трикутник;
3) визначити на підставі даних задачі послідовність побудови інших вершин, припустивши, що допоміжний трикутник побудовано;

4) здійснити всі заплановані побудови;
5) провести необхідні доведення та дослідження.

Доволі часто метод допоміжного трикутника використовують у поєднанні з іншими методами. Розглянемо такі випадки на прикладах.

Задача

Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та сумою другого катета й гіпотенузи.

Розв'язання

Нехай a і $b+c$ — катет і сума другого катета й гіпотенузи трикутника ABC, який необхідно побудувати (рис. 194).

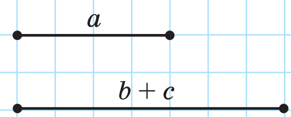


Рис. 194

Аналіз

Припустимо, що трикутник ABC побудовано (рис. 195). Відкладемо на промені BC відрізок CD завдовжки c і сполучимо точки A і D. Трикутник ABD прямокутний із катетами a і $b+c$, тобто може бути побудований за даними задачі і є допоміжним.

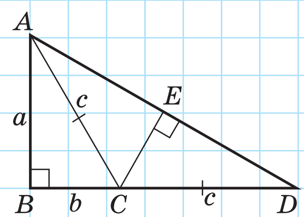


Рис. 195

Побудувавши його, дістанемо вершини A і B шуканого трикутника. Для побудови вершини C скористаємось однією з ознак рівнобедреного трикутника. Точка C є точкою перетину серединного перпендикуляра до сторони AD з променем BD.

Побудова

1. Побудуємо прямий кут із вершиною B.
2. Відкладемо на сторонах цього кута відрізки $AB=a$ і $BD=b+c$ та сполучимо точки A і D. Трикутник ABD є допоміжним.
3. Побудуємо перпендикуляр до відрізка AD, що проходить через його середину E. Нехай C — точка його перетину з променем BD.
4. Сполучимо точки A і C.

Доведення

У трикутнику ABC $\angle B = 90°$, $AB = a$ за побудовою. У трикутнику ACD CE — висота й медіана (за побудовою). Таким чином, трикутник ACD рівнобедрений з основою AD, звідки $CA = CD = c$. За побудовою $BD = BC + CD = b + c$, отже, $BC + CA = b + c$. Таким чином, трикутник ABC є шуканим.

Дослідження

Відповідно до нерівності трикутника задача має розв'язки за умови $a < b + c$.

У ході розв'язування цієї задачі ми використали ***метод спрямлення***. Суть його така: якщо в умові задачі на побудову задано суму (або різницю) відрізків, то на рисунку-ескізі їх необхідно відкласти на одній прямій від спільного кінця так, щоб інші кінці цих відрізків утворили заданий відрізок-суму (різницю). Завдяки такій додатковій побудові вдається дістати допоміжний трикутник.

Задача

Побудуйте трикутник за медіаною й двома кутами, на які вона ділить кут трикутника.

Розв'язання

Нехай m — медіана трикутника ABC, який необхідно побудувати, α і β — кути, на які медіана ділить кут трикутника (рис. 196).

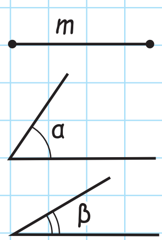


Рис. 196

Аналіз

Припустимо, що трикутник ABC побудовано (рис. 197). Застосуємо метод подвоєння медіани. Для цього на промені BM відкладемо відрізок MD, що дорівнює m, і сполучимо точки D і A. За першою ознакою рівності трикутників $\Delta AMD = \Delta CMB$ ($AM = CM$ за означенням медіани, $BM = DM$ за побудовою, $\angle AMD = \angle CMB$ як вертикальні). Тоді $\angle ADM = \angle CBM = \beta$.

Отже, трикутник ABD є допоміжним, оскільки його можна побудувати за стороною й прилеглими до неї кутами ($BD=2m$, $\angle ABD=\alpha$, $\angle ADB=\beta$). Побудувавши цей трикутник, дістанемо вершини A і B шуканого трикутника. Для побудови вершини C достатньо подвоїти в трикутнику ABD медіану AM.

Побудова (скорочений план)

1. Побудуємо трикутник ABD, у якому $BD=2m$, $\angle ABD=\alpha$, $\angle ADB=\beta$. Трикутник ABD є допоміжним.
2. Побудуємо в трикутнику ABD медіану AM і на її продовженні відкладемо відрізок MC, що дорівнює AM.
3. Сполучимо точки B і C.

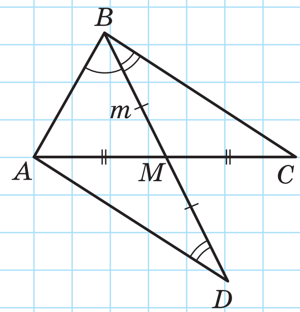


Рис. 197

Доведення

$\Delta AMD=\Delta CMB$ за першою ознакою рівності трикутників ($MD=MB$, $AM=MC$ за побудовою, $\angle AMD=\angle CMB$ як вертикальні). Тоді $\angle CBM=\angle ADM=\beta$. Також за побудовою $\angle ABM=\alpha$. У трикутнику ABC $BM=m$ — медіана, оскільки за побудовою $BD=2m$ і $AM=MC$. Таким чином, трикутник ABC — шуканий.

Задача

Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і висотою, проведеною до іншої сторони.

Розв’язання

Нехай a — сторона шуканого трикутника ABC, m_a — проведена до неї медіана, h_b — висота трикутника, проведена до іншої сторони (рис. 198). Побудуємо цей трикутник.

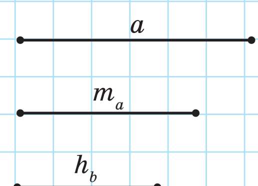


Рис. 198

Аналіз

Нехай трикутник ABC побудовано (рис. 199). Тоді прямокутний трикутник BCH можна побудувати за

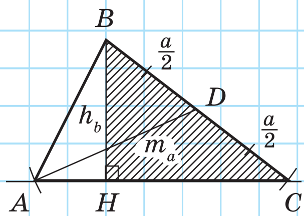


Рис. 199

гіпотенузою BC і катетом BH: на стороні прямого кута H відкладемо катет $BH=h_b$, тоді C — точка перетину кола з центром B радіуса a з другою стороною прямого кута.

У такий спосіб ми побудуємо вершини B і C шуканого трикутника. Для побудови вершини A знову використаємо метод геометричних місць. Оскільки основа висоти BH належить стороні AC, то точка A має лежати на прямій HC. Крім того, оскільки $AD=m_a$, то точка A має лежати на відстані m_a від точки D. Це означає, що A — точка перетину прямої CH і кола радіуса m_a з центром D.

Побудова

1. Побудуємо прямий кут із вершиною H.
2. Відкладемо на стороні цього кута відрізок BH, $BH=h_b$.
3. Побудуємо коло з центром B радіуса a.

Нехай C — точка перетину цього кола з другою стороною прямого кута.

4. Сполучимо точки B і C та поділимо відрізок BC навпіл. Нехай точка D — його середина.
5. Проведемо пряму CH.
6. Побудуємо коло з центром D радіуса m_a. Нехай A — точка перетину цього кола з прямою CH.
7. Сполучимо точки A і B.

Доведення

У трикутнику ABC $BC=a$, $AD=m_a$, AD — медіана, $BH=h_b$, BH — висота (за побудовою). Отже, трикутник ABC — шуканий.

Дослідження

Відповідно до наслідку теореми про порівняння сторін і кутів трикутника допоміжний трикутник існує, якщо $h_b<a$. Залежно від довжини медіани m_a задача має один розв'язок, або два, або не має жодного.

Відповіді та вказівки

Розділ I. Елементарні геометричні фігури та їхні властивості. Взаємне розміщення прямих на площині

11. Одну. **13.** По один бік. Не може. **14.** Точка K. **15.** Ні. **16.** Дві. **17.** Точки P і Q. Так. **18.** Шість. **19.** Чотири. **20.** Красноград. **21.** Точка X. **22.** Точка B. **23.** Точка C. **24.** Так. **25.** Не обов'язково. **26.** Одну; чотири; шість. **27.** Одна або три. **28.** $n-1$ точка — на одній прямій, одна точка — поза цією прямою. **29.** Чотири. Одна. Зміниться. **30.** а) Ні; б) так. **31.** б) і в). **41.** а) 7 см; б) 2,5 см. **42.** 4 см. **43.** MR і PN. **44.** AB і BC. **45.** 9 см або 3,8 см. **46.** 14,2 см або 1,8 см. **47.** Точка P. **48.** а) 16 см і 8 см; б) 12 см і 21 см. **49.** 5,1 см. **50.** 16,4 мм або 7,8 мм. **51.** 11,6 см або 6,8 см. **52.** а) 24 см; б) 16 см. **53.** MK. **54.** AC. **55.** а) 1-й випадок: B між A і M, $BM=1$ см; 2-й випадок: A між B і M, $AM=1$ см; б) будь-яка точка відрізка AB; в) 1-й випадок: M між A і B, $AM=4$ см; 2-й випадок: B між A і M, $BM=6$ см. **56.** Три відрізки завдовжки $2a$ і два відрізки завдовжки $3a$. **57.** 10 см. **58.** 10 см. **60.** Так. **61.** Ні. **62.** а) Ні; б) так. **72.** а) $126°$; б) $81°$. **73.** $40°$. **74.** Ні. **75.** $76°$; $38°$. **76.** а) $104°$; б) $45°$. **77.** а) $55°$ і $95°$; б) $60°$ і $90°$. **78.** а) $20°$ і $100°$; б) $45°$ і $75°$. **79.** $35°$. **80.** $76°$. **81.** $140°$. **82.** $120°$. **83.** $80°$. **84.** $120°$. **85.** П'ять. **86.** а) Ні; б) так; в) так. **95.** Дві. Ні. **96.** Ні. **99.** Шість. **100.** Чотири. **101.** Три або чотири. **102.** Одна або жодної. **105.** Три або чотири. **108.** $25°$ або $65°$. **109.** $90°$. **117.** Чотири. **118.** Дві. **119.** а) $25°$ і $155°$; б) $55°$ і $125°$. **120.** а) $45°$ і $135°$; б) $80°$ і $100°$. **121.** $80°$. **122.** $\angle 2<\angle 4$. **123.** $71°$. **124.** $60°$. **125.** $100°$. **126.** $30°$. **127.** $120°$. **128.** $70°$. **129.** $140°$ і $40°$. **130.** $120°$. **131.** $90°$. **132.** Ні. **133.** *Вказівка*. Доведіть, що кут AOC розгорнутий. **134.** m і p, n і k. **135.** $148°$, $32°$. **145.** $55°$; $125°$; $55°$. Кут між прямими $55°$. **146.** а) $46°$; $134°$; $46°$; $134°$; б) $45°$; $135°$; $45°$; $135°$. **147.** а) $160°$; $20°$; $160°$; $20°$; б) $65°$; $115°$; $65°$; $115°$. **151.** $20°$. **152.** $65°$. **153.** а) $65°$; $115°$; $65°$; $115°$; б) $80°$; $100°$; $80°$; $100°$. **154.** а) $70°$; б) $60°$. **155.** $85°$; $56°$; $85°$; $39°$. **156.** $36°$. **159.** $60°$. **162.** $105°$. **163.** Дві. **164.** 16 см або 32 см. **165.** $35°$ або $15°$. **166.** Дві точки на промені BA, такі, що $BD=1$ або $BD=3$. **167.** В одному напрямку — на 5 одиниць, у різних — на 2 одиниці. **168.** *Вказівка*. $6=5+5-2-2$ або $2+2+2$. **169.** *Вказівка*. $40°=180°-35°-35°-35°-35°$. **170.** Відкласти послідовно 11 кутів величиною $17°$ зі спільними сторонами. Тоді кут між крайніми сторонами становитиме $17°\cdot 11=187°$, що на $7°$ більше, ніж розгорнутий кут. б) *Вказівка*. $17°\cdot 10=170°$, $180°-170°=10°$. **171.** *Вказівка*. $27°\cdot 10-180°=90°$. **172.** 6.

Розділ ІІ. Трикутники. Ознаки рівності трикутників

184. 16 см. **185.** *B*. **186.** а) $125°$; б) 11 см; в) 26 см. **187.** а) *C*; б) *FK*; в) $\triangle FEK$. **188.** *QPR*. **189.** $\triangle ABC = \triangle YZX$. **190.** Три. **191.** а) 45 мм; б) 12 мм; в) 14 мм. **192.** *B* і *C*. **193.** $\angle D = \angle K = 45°$, $\angle B = \angle E = 55°$, $\angle C = \angle N = 80°$. **194.** $DE = KM = 9$ см, $BC = EF = 8$ см, $AC = DF = KN = 7$ см. **195.** Ні. **197.** *A* і *C*. **198.** *B*. **199.** $\triangle ABC = \triangle YXZ$. **200.** $\triangle ABC = \triangle ZYX$. **212.** б) 8 см. **213.** $25°$. **218.** 14 см. **219.** 4 см. **224.** *Вказівка*. Доведіть рівність трикутників *ABD* і *CBD*. **226.** Три. **227.** $90°$. **234.** а) *CB*; б) *AB*. **235.** *CD*. **236.** Чотири або жодного. **237.** Ні. **238.** $a \parallel b$. **239.** *A*, *C*, *D*, *E*. **240.** а) *KN*; б) *MN*. **241.** а) *AB*; б) *CB*. **244.** Так. **245.** Якщо перпендикуляри, проведені з точок *A* і *B* до прямої *c*, мають спільну основу. **257.** 8 см. **262.** 8 см. **270.** $\triangle ACD$, $\triangle BCD$. **277.** 1 м; 0,8 м; 0,8 м. **278.** а) 5 см; б) 8 см, в) 6 см, 6 см, 8 см. **285.** 9 м, 6 м, 6 м або 8 м, 8 м, 5 м. **286.** 12 см. **294.** в). **310.** 16 см. **311.** 14 см. **318.** 6 см. **330.** $\angle A = \angle A_1$; $BC = B_1C_1$. **337.** $\angle BCA = \angle B_1CA$ або $AB = A_1B_1$. **352.** б), г). **353.** а) $b \parallel c$; б) $b \parallel c$. **365.** Ні. **370.** $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. **377.** Три; два. **386.** а) $66°$, $114°$; б) $32°$, $32°$. **387.** Три кути по $18°$ і чотири кути по $162°$. **388.** а) Так; б) так. **389.** Ні. **390.** $b \perp c$. **391.** A_1A_2 і B_1B_2 **392.** а) $110°$; б) $158°$. **393.** а) $75°$ і $105°$; б) $28°$ і $152°$. **394.** Ні. **395.** $72°$. **400.** *Вказівка*. Проведіть через точку *E* пряму, паралельну *AB*. **401.** а) $90°$; б) $30°$ і $150°$; в) $50°$ і $130°$. **413.** а) $70°$; б) $42°$; в) $26°$. **414.** а) $40°$ і $100°$; б) $70°$ і $70°$. **415.** а) $90°$ і $62°$; б) $80°$ і $20°$. **418.** $45°$, $70°$ і $65°$. **419.** $55°$ і $85°$; $140°$ і $95°$. **420.** а) $30°$, $50°$, $100°$; б) $20°$, $60°$, $100°$. **421.** $50°$ і $80°$ або $65°$ й $65°$. **422.** а) $20°$, $70°$, $90°$; б) $40°$ і $40°$. **423.** Ні. **425.** $20°$, $20°$, $140°$. **426.** $65°$. **427.** $120°$. **428.** $100°$, $40°$, $40°$. **429.** $120°$, $30°$, $30°$. **430.** $30°$, $60°$, $90°$. **431.** $30°$, $50°$, $100°$. **432.** $72°$, $72°$, $36°$. **433.** $72°$, $72°$, $36°$. **434.** $108°$, $36°$, $36°$. **435.** $108°$, $36°$, $36°$. **436.** $90° + \frac{\alpha}{2}$. **448.** $90°$, $45°$, $45°$. **449.** $90°$, $60°$, $30°$. **450.** а) $15°$ і $75°$; б) $50°$ і $40°$. **451.** а) $50°$ і $40°$; б) $20°$ і $70°$. **454.** *D*. **455.** *C*. **456.** $90°$, $25°$, $65°$. **457.** $80°$, $52°$, $48°$. **458.** 8 см. **459.** $55°$, $55°$, $70°$. **460.** $32°$, $58°$. **463.** $65°$, $65°$, $50°$ або $115°$, $15°$, $50°$. **464.** $65°$, $25°$. **467.** $70°$, $70°$, $40°$. **468.** $50°$, $50°$, $80°$. **469.** *Вказівка*. Скористайтеся методом подвоєння медіани. **471.** $67°$ і $23°$ **472.** $72°$, $72°$, $36°$. **473.** 12 см і 6 см. **474.** 7 см і 14 см. **475.** 12 см. **476.** 12 см. **477.** 8 см. **478.** $80°$. **479.** а) *DE*; б) *K*. **480.** Висота. **481.** а)–г). Ні. **482.** Ні. **483.** 5 см. **486.** *A*. **487.** *C*. **488.** *BC*. **489.** а) 14 см; б) 10 см; в) 3 см або 4 см. **490.** 16 см. **494.** а) Ні; б) так. **495.** *BC*. **496.** *B*. **497.** 5 см, 5 см і 8 см або 7 см, 7 см і 4 см. **498.** 10 м, 30 м і 30 м. **499.** 1 м. **502.** *BC*. 503. *B*. **505.** *b*. **506.** а) $a - b < c < a + b$; б) $2a < P < 2(a + b)$. **507.** *Вказівка*. Скористайтеся методом подвоєння медіани. **510.** *AOB* і *COD*, *AOD* і *COD*, *BAD* і *DCB*, *ABC* і *CDA*. **512.** Три. **514.** Ні. **516.** $20°$, $30°$, $130°$. **517.** Ні. **520.** $90°$, $60°$, $30°$. **526.** α або $180°-\alpha$. **528.** 6 см. **529.** 5 см. **530.** 9 см або 5 см. *Вказівка*. Трикутники *ABK* і *MBC* рівнобедрені. **531.** $120°$. **533.** а) 3; б) 13.

Розділ III. Коло і круг. Геометричні побудови

540. 16 см. **541.** 5,5 см. **542.** б) 22 см. **543.** 15 см. **544.** $60°$. **545.** $120°$. **547.** $90°$. **550.** *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю трикутника для трикутника, утвореного довільною хордою й радіусами, проведеними до її кінців. **552.** $120°$. **553.** $90°$. **557.** $90°$, $50°$, $40°$. **564.** а) $70°$; б) 8 см. **565.** $45°$ і $45°$. **566.** $30°$. **567.** $60°$. **568.** $30°$. **569.** $130°$. **570.** 3 см і 25 см. **574.** $120°$. **575.** $80°$. **576.** 2 см або 18 см. **577.** 10 см і 6 см. **579.** 15 см. **580.** 14 см. **581.** а) 1, або 2, або 3, або 4; б) 1, або 2, або 3, або 6. **603.** *Вказівка*. Скористайтеся методом подвоєння медіани. **604.** *Вказівка*. Проведіть пряму, паралельну даній стороні, так, щоб відстань між ними дорівнювала даній висоті. **609.** 11 см. **612.** в) Ні. **624.** Серединний перпендикуляр до відрізка AB. **625.** Коло з центром A радіуса R. **626.** Бісектриса даного кута без його вершини. **627.** Дві прямі, паралельні AB й віддалені від неї на h. **631.** Діаметр кола, перпендикулярний до даної прямої, без кінців цього діаметра. **632.** Коло, що дотикається до даних хорд, із центром, який збігається з центром даного кола. **633.** Пряма OA без точок O і A. **634.** Бісектриси всіх нерозгорнутих кутів, утворених даними прямими. **640.** 90°. **648.** б) $80°$. **649.** б) $20°$. **652.** 18 см. **653.** $50°$. **654.** 8 см. **655.** $55°$. **658.** 32 см. **659.** 22 см. **662.** 77 см, 77 см, 66 см або 70 см, 70 см, 80 см. **665.** $2R$. **667.** Якщо $AB<6$ см — дві точки, якщо $AB=6$ см — одна точка, якщо $AB>6$ см — жодної точки. **672.** a. **673.** Шість. **674.** $36°$, $36°$, $108°$ або $\left(25\frac{5}{7}\right)^{\circ}$, $\left(77\frac{1}{7}\right)^{\circ}$, $\left(77\frac{1}{7}\right)^{\circ}$. **675.** $70°$, $70°$, $40°$. **676.** б) Ні, якщо кути *BAC* і *DAC* не гострі. **678.** $30°$. **681.** *Вказівка*. Точка дотику є точкою перетину даного кола і кола з діаметром AO. **682.** $a+c-b$.

Предметний покажчик

А
Аксіома 6
— вимірювання відрізків 16
— — кутів 24
— відкладання відрізків 16
— — кутів 24
— паралельних прямих (Евкліда) 32
— проведення прямої 8
— розміщення точок на прямій 8
Аналогія 26
Б
Бісектриса кута 23
— трикутника 99
Бічна сторона рівнобедреного трикутника 90
В
Вершина кута 21
— трикутника 63
Висновок 34
Висота трикутника 100
Вимірювання відрізків 15
— кутів 23
Відрізки дотичних 172
— паралельні 31
— перпендикулярні 47
— рівні 14
Відрізок 14
Відстань від точки до прямої 78
— між двома точками 17
— між паралельними прямими 126
Властивість 110
— відрізків дотичних 172
— діаметра, перпендикулярного до хорди 166
— дотичної 170
— кутів рівнобедреного трикутника 91
— — утворених при перетині паралельних прямих січною 123
— медіани, бісектриси й висоти рівнобедреного трикутника 100
Г
Геометричне місце точок (ГМТ) 187
Гіпотенуза 139
Градусна міра кута 24
Д
Діаметр 166
Довжина відрізка 16
Дотична до кола 170
Дотик двох кіл 172
— — — внутрішній 173
— — — зовнішній 173
Е
Елементи трикутника 63
К
Катет 139
Кінці відрізка 14
Класифікація 133
Коло 165
— вписане у трикутник 197
— описане навколо трикутника 195
Контрприклад 71
Круг 165
Кут 21
— гострий 25
— між двома прямими 46
— прямий 24
— розгорнутий 22
— трикутника 63
— — зовнішній 134
— тупий 25
Кути вертикальні 45
— відповідні 115
— внутрішні односторонні 115
— — різносторонні 115
— рівні 22
— суміжні 39
М
Медіана трикутника 99
Метод геометричних місць 190
— доведення від супротивного 35
— допоміжного трикутника 184
— подвоєння медіани 104
— спрямлення 216

Н
Наслідок 40
О
Ознака 110
— дотичної 171
— рівнобедреного трикутника 92
Ознаки рівності прямокутних трикутників 139, 140
— рівності трикутників 69, 83, 108
— паралельності двох прямих, які перетинаються січною 115, 116
Означення 10
Основа рівнобедреного трикутника 90
П
Периметр трикутника 64
Перпендикуляр, проведений з точки до прямої 78
— серединний до відрізка 181
— спільний до двох прямих 126
Півпряма 9
Планіметрія 6
Побудова 177
— бісектриси кута 179
— кута, який дорівнює даному 179
— перпендикулярної прямої 180
— прямої, паралельної даній 181
— середини відрізка 181
— трикутника за даними сторонами 178
Посилання 40
Початкова точка променя 9
Початок променя 9
Промені доповняльні 9
Промінь 9
Пряма 7
Прямі паралельні 31
— перпендикулярні 47
Р
Радіус кола (круга) 165
С
Середина відрізка 15
Січна 115
— кола 170
Сторона кута 21
— трикутника 63
Т
Теорема 32
— обернена 94
— про бісектрису кута 189
— — вертикальні кути 45
— — відстані від точок прямої до паралельної прямої 125
— — дві прямі, паралельні третій 32
— — — —, перпендикулярні до третьої 47
— — зовнішній кут трикутника 134
— — існування і єдиність перпендикулярної прямої 76
— — — — — прямої, паралельної даній 118
— — коло, вписане у трикутник 197
— — —, описане навколо трикутника 195
— — серединний перпендикуляр 188
— — суміжні кути 39
— — суму кутів трикутника 131
— пряма 94
Точка 7
— дотику 170
Трикутник 63
—, вписаний у коло 195
— гострокутний 132
—, описаний навколо кола 197
— прямокутний 132
— рівнобедрений 90
— рівносторонній 90
— різносторонній 90
— тупокутний 132
У
Умова 34
Ф
Фігури рівні 64
Х
Хорда 166
Ц
Центр кола (круга) 165
— —, вписаного у трикутник 197
— —, описаного навколо трикутника 195

Зміст

Розділ I. Елементарні геометричні фігури та їхні властивості. Взаємне розміщення прямих на площині 5
§1. Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь 7
§2. Відрізок. Вимірювання та відкладання відрізків. Відстань між двома точками 14
§3. Кут. Вимірювання та відкладання кутів. Бісектриса кута 21
§4. Паралельні прямі 31
§5. Суміжні кути та їхні властивості 39
§6. Вертикальні кути та їхні властивості. Перпендикулярні прямі. Кут між двома прямими 45
Підсумки 53
Розділ II. Трикутники. Ознаки рівності трикутників 61
§7. Трикутник і його елементи. Рівність геометричних фігур 63
§8. Перша ознака рівності трикутників та її застосування 69
§9. Перпендикуляр до прямої. Відстань від точки до прямої 76
§10. Друга ознака рівності трикутників та її застосування 83
§11. Види трикутників. Рівнобедрений трикутник, його властивість та ознака 90
§12. Медіана, бісектриса й висота трикутника. Властивості та ознаки рівнобедреного трикутника, пов’язані з ними 99
§13. Третя ознака рівності трикутників та її застосування 108
§14. Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих 115
§15. Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною 123
§16. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника 131
§17. Прямокутні трикутники. Ознаки та властивості прямокутних трикутників 139
§18. Співвідношення між сторонами і кутами трикутника. Нерівність трикутника 146
Підсумки 153
Розділ III. Коло і круг. Геометричні побудови 163
§19. Коло і круг 165
§20. Дотична до кола, її властивість та ознака 170
§21.* Задача на побудову та її розв’язування. Основні задачі на побудову . . . 177
§22. Геометричне місце точок 187
§23. Описане і вписане кола трикутника 195
Підсумки 203
Додатки 213
Відповіді та вказівки 219
Предметний покажчик 222

Видання є складовою навчально-методичного комплекту «Геометрія-7»

- **ПІДРУЧНИК «ГЕОМЕТРІЯ. 7 КЛАС»**
- **Збірник самостійних і контрольних робіт**
- **Розробки уроків**

ОСОБЛИВОСТІ ПІДРУЧНИКА

- багаторівнева побудова навчального матеріалу
- тематичне узагальнення і систематизація
- авторська система усних, графічних та письмових вправ
- доступність викладення, зручність користування

ІНТЕРНЕТ-ПІДТРИМКА
Матеріали до підручника
interactive.ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-2105-5